

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
Технологический институт
Федерального государственного образовательного учреждения
высшего образования
«Южный федеральный университет»**

П. А. Землянухин

ТЕОРИЯ РАДИОТЕХНИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ

**Учебное пособие
Часть 1**

Ростов-на-Дону
Издательство Южного федерального университета
2014

Рецензенты:

доктор технических наук, профессор, зам. директора по НИР, зав. кафедрой «Информационные системы и радиотехника» ИСОиП (филиал) ДГТУ Прокопенко Н.Н.;

доктор технических наук, профессор, зам. директора по ИД, зав. кафедрой «Радиоэлектронные и электротехнические системы и комплексы» ИСОиП (филиал) ДГТУ Марчук В.И.

Землянухин П.А. Теория радиотехнических сигналов: учебное пособие. Часть 1. – Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ, 2014. – 118 с.

Учебное пособие содержит материал лекций, читаемых студентам по дисциплине «Теория радиотехнических сигналов» специальностей 090302 и 10.05.02 всех форм обучения. Даются понятия сигналов, построения их моделей. Рассмотрены вопросы спектрального анализа периодических и непериодических сигналов. Дано понятие корреляционного анализа, рассмотрены автокорреляционная и взаимно-корреляционная функции.

Илл. 47. Библиогр.: 7 назв.

Работа выполнена на основе Гос. задания № 213.01-11/2014-9, выполненного вузом в рамках базовой части государственного задания.

©ЮФУ, 2014

© Землянухин П.А., 2014

© Оформление. Макет.

Изд-во ЮФУ, 2014

ВВЕДЕНИЕ

Радиотехника — это наука об электромагнитных колебаниях и отрасль техники, в которой решают вопросы применения этих колебаний для передачи, приема и извлечения информации, содержащейся в принимаемых сигналах. В связи с этим владение теорией сигналов, методами их анализа является достаточно актуальным во множестве знаний, которые студент приобретает, обучаясь по специальности 090302 «Информационная безопасность телекоммуникационных систем».

Открытия, сделанные в XIX веке, это первые открытия, которые способствовали началу развития радиотехники. Так в 1800 г. итальянский физик А.Вольта создал первый химический источник тока и открыл контактную разность потенциалов, в 1820 г. французский ученый А.М. Ампер открыл закон механического взаимодействия проводников, по которым протекает ток, построил теорию магнетизма. В 1831 г. английский физик М.Фарадей открыл электромагнитную индукцию, ввёл понятие электрического и магнитного полей, высказал идею о существовании электромагнитных волн. В 1839 г. физик Б.С.Якоби изобрел телеграфный аппарат с записью сигнала в виде ломаной линии. В 1844 г. С. Морзе создал телеграфный аппарат и телеграфную азбуку, в которой символы обозначаются набором точек и тире.

Большой вклад в развитие радиотехники внес русский ученый А.С. Попов. Он высказал идею по передаче сигналов с помощью электромагнитных волн и впервые осуществил ее на заседании Русского физико-химического общества 7 мая 1895 г. Позднее А.С. Попов продемонстрировал радиотелеграфную связь. В 1898 г. помощник А.С. Попова П.Н. Рыбкин осуществил прием радиотелеграфных сигналов на слух. Это позволило существенно увеличить дальность радиосвязи.

В 1904 г. Флемингом был изобретен электровакуумный диод, а в 1906 г. Ли де Форест, введя в лампу третий электрод-сетку, изобрел электровакуумный триод. Это позволило, с одной стороны, качественно улучшить радиотехнические устройства, а с другой стороны обеспечить усиление, генерирование и преобразование электрических колебаний в широком диапазоне частот.

В 1918 г. в Нижнем Новгороде была создана радиолaborатория, которая, по сути, являлась первым научно-исследовательским институтом в России. Она занималась разработкой и совершенствованием электронных ламп, конструированием передатчиков большой и малой мощности, разработкой радиоприемников.

Развитие радиотехники позволило создать новые средства для передачи информации – телевидение. В 1929 г. начались экспериментальные телевизионные передачи. В 1936 г. на Би-би-си в Англии организовано постоянное вещание.

В СССР перед Великой Отечественной войной была создана мощная радиотехническая промышленность. В стране работало большое число научно-исследовательских институтов радиотехнического профиля. Это позволило уже в 1939 г. поставить на вооружение Красной Армии первые радиолокационные станции РУС-1.

После окончания Великой Отечественной войны достижения в области радиотехники продолжают совершенствоваться и развиваться. Появляются первые полупроводниковые приборы. Они позволили повысить скорость передачи информации при существенном снижении мощностных характеристик радиотехнических устройств. Началось широкое освоение коротких и ультракоротких волн.

Появляются первые средства вычислительной техники, которые создают основу дальнейшего совершенствования радиотехнических устройств. Создаются средства связи, имеющие высокую помехозащищенность. Средства вычислительной техники способствовали созданию разветвленных сетей многоканальных систем связи, которые позволяют с высокой скоростью и достоверностью передавать различную информацию: телефонную, телеграфную, цифровую и т.д.

В СССР 4 октября 1957 г. осуществлен запуск первого искусственного спутника Земли. Эта возможность прямо связана с развитием радиотехники и электроники. Космические аппараты подтолкнули к развитию спутниковых средств связи. На орбите Земли летает множество искусственных спутников, которые позволяют передать любую информацию в любой уголок Земли.

В 1958 г. году был изобретен первый лазер. Это позволило начать освоение нового направления радиотехники – волоконно-оптические линии связи с ранее невиданными скоростями передачи информации, кроме этого сделать связь более надежной.

Развитие радиотехники позволило создавать и использовать радиотехнические устройства в областях далеких от радиотехники: медицина, различные отрасли промышленности (например, промышленное телевидение), пищевая промышленность и т.д. Но при этом знание теории радиотехнических сигналов является главенствующим, поскольку выбор тех или иных сигналов, как правило, придает положительные свойства радиотехническим устройствам.

На рис. В.1. представлена структурная схема канала радиосвязи.

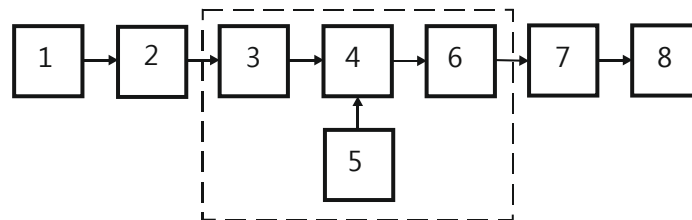


Рис. В.1. Структурная схема канала радиосвязи: 1 – источник сообщения; 2 – преобразователь сообщения в сигнал; 3 – передатчик; 4 – линия связи; 5 – источник помех; 6 – приемник; 7 – преобразователь сигнала в сообщение; 8 – получатель сообщения

Источниками сообщений могут служить, например, человек, произносящий речь; газ (жидкость), протекающий в трубопроводе; изменение температуры, какого-либо объекта и т.д. Человек, произнося те или иные звуки, вызывает колебания молекул воздушной смеси. Во втором случае молекулы газа, текущего в трубопроводе, с одной стороны, могут иметь различную скорость движения, а с другой стороны, – оказывать различное давление на стенки трубопровода. В третьем случае под воздействием каких-то физических явлений происходит изменение температуры.

Таким образом, источник сообщения своим действием инициирует к действию те или иные физические явления, например, изменение давления, скорости, ускорения, объема, температуры, направления и т.д. Изменения физических явлений могут быть восприняты различными

преобразователями сообщений в сигналы. Одним из преобразователей сообщения в сигнал может служить угольный микрофон, в котором звуковое давление, оказываемое на мембрану и соответственно на угольный порошок, преобразуется в сигнал. Это происходит за счет того, что при увеличении давления угольный порошок уплотняется, что приводит к уменьшению внутреннего сопротивления микрофона и, соответственно, к увеличению тока в цепи и росту падения напряжения на сопротивлении нагрузки. При уменьшении давления происходит обратный процесс, приводящий к уменьшению тока в цепи и падения напряжения на сопротивлении нагрузки.

Сигнал, полученный на выходе микрофона, приобретает некоторый вид, отражающий сообщение. Далее сигнал поступает в передатчик, где, в зависимости от требований работы радиоканала, может быть:

- усилен по напряжению, току или мощности;
- сформирован модулированный сигнал;
- перенесен спектр сигнала по оси частот в более высокочастотную область;
- представлен в виде некоторой кодовой последовательности.

Соответственно, в передатчике сигнал подвергается различным преобразованиям и приводится к виду, удобному для передачи его по линии связи.

Все сигналы относительно оси частот можно разбить на радиоволны и управляющие сигналы. Радиоволны имеют частоту во много раз большую, чем управляющие сигналы, и выполняют роль переносчиков информации (несущее колебание). Управляющие сигналы непосредственно отражают в себе информацию. Спектр частот управляющего сигнала может иметь как достаточно низкие частоты (речь человека будет разборчива, если в ней присутствуют спектральные составляющие частот от 300 Гц до 3 кГц), так и весьма высокие (спектр импульсного сигнала может включать частоты в единицы и даже десятки мегагерц).

Несущее колебание может иметь частоту от нескольких десятков килогерц до частот светового диапазона. Но при этом выбор того или

иногo частотного диапазона для конкретной радиотехнической системы (системы связи) определяется различными факторами:

- особенностью распространения электромагнитных волн данного частотного диапазона;
- характером помех в данном диапазоне частот;
- шириной спектра управляющего сигнала;
- габаритами антенны.

Так, например, радиосвязь, осуществляемая на сверхдлинных и длинных волнах, имеет два больших недостатка:

- требуется большая мощность передатчика, поскольку поверхностная волна, распространяемая вдоль поверхности Земли, сильно поглощается;
- невозможно передать управляющие сигналы с частотой спектра, соизмеримой с частотой несущего колебания.

Средние волны нашли широкое применение в радиовещании, поскольку они обеспечивают достаточно устойчивый прием. В то же время они не позволяют обеспечить большую дальность передачи и в основном используются в зоне с радиусом в несколько сотен километров.

Короткие волны способны обеспечить большую дальность передачи сигналов при относительно низкой мощности передатчика. Кроме того они позволяют обеспечить направленное излучение электромагнитной волны.

Использование частотных диапазонов метровых, дециметровых, сантиметровых и миллиметровых длин волн позволило развивать новые области радиовещания, в частности телевидение, индивидуальные средства связи, системы навигации и т.д., что существенно расширяет ширину спектра управляющих сигналов. Кроме этого, использование данных диапазонов частот позволяет передавать сообщения практически без искажений, поскольку эти волны распространяются в пределах прямой видимости.

Имея несущее колебание и управляющий сигнал, их необходимо объединить в один радиосигнал, это осуществляется путем модуляции. В данном случае под модуляцией понимается изменение одного из

параметров несущего колебания в соответствии с изменениями управляющего сигнала.

В приемнике, сигнал, прошедший по линии связи, подвергается обратным преобразованиям с целью выделения информации и predания ей требуемого вида. В дальнейшем сигнал преобразуется в сообщение (например, преобразование сигнала в звук в громкоговорителе).

Здесь в кратком виде описан процесс работы радиотехнического устройства. Можно видеть, что в процессе прохождения сигнала по каналу связи выполняется множество различных операций над сигналом. Для осуществления этого используются различные радиотехнические цепи и устройства: интегрирующие и дифференцирующие цепи, фильтрующие элементы, усилители, цепи обратной связи, автогенераторы формирователи последовательностей прямоугольных импульсов, модуляторы, детекторы, умножители частот, которые осуществляют те или иные операции над сигналами, знание которых желательно для студентов, обучающихся по специальности 090302 «Информационная безопасность телекоммуникационных систем».

Целью изучения дисциплины «Теория радиотехнических сигналов» является обучение студентов основам построения радиоэлектронной аппаратуры сложных телекоммуникационных систем. Это достигается обучением студентов методам анализа радиотехнических сигналов, ознакомлением с видами, характеристиками и свойствами сигналов применительно к телекоммуникационным системам передачи информации.

Задача дисциплины «Теория радиотехнических сигналов» – сформировать необходимый минимум специальных теоретических и практических знаний, которые обеспечивают понимание принципов использования сложных радиосигналов в области защиты данных в телекоммуникационных системах и анализ свойств таких сигналов применительно к радиоэлектронным системам обработки информации.

Учебная дисциплина «Теория радиотехнических сигналов» относится к базовой части профессионального цикла учебного плана подготовки специалиста.

В результате освоения дисциплины обучающийся должен:

Знать:

- основные понятия, связанные с математическим описанием сигналов и анализом их свойств, характеристик и параметров;
- основы спектрального, корреляционного анализа сигналов, представление сигналов в частотно-временной областях;
- современные виды сигналов, их особенности и свойства, обеспечивающие основные характеристики защищенных телекоммуникационных систем;
- модели современных сигналов и алгоритмы их формирования;
- методы анализа преобразования детерминированных сигналов в линейных и нелинейных цепях.

Уметь:

- составлять математические модели детерминированных и случайных сигналов во временной и частотной областях;
- проводить анализ сигналов во временной и частотной областях;
- проводить анализ преобразования сигналов линейными и нелинейными цепями;
- применять знания по использованию узкополосных и широкополосных сигналов в телекоммуникационных системах;
- пользоваться научно-технической информацией по радиотехническим сигналам в современных системах связи.

Владеть:

- навыками построения моделей детерминированных и случайных сигналов в частотной и временной областях;
- навыками спектрального анализа сигналов;
- навыками корреляционного анализа сигналов;
- навыками использования ЭВМ для машинного анализа параметров и характеристик сигналов;
- методом подбора характеристик и параметров сигналов, их вида применительно к обеспечению улучшенных характеристик и свойств защищенных телекоммуникационных систем.

1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О СИГНАЛАХ

1.1. Основные понятия и определения применительно к сигналам

Термин «сигнал» можно встретить во многих областях знаний и жизнедеятельности человека. Однако под термином «сигнал» весьма часто отождествляют такие понятия, как информация, сообщение и непосредственно сам сигнал. Однако это не всегда корректно, поскольку каждый из терминов: информация, сообщение, сигнал, несет свою смысловую нагрузку.

Термин «сигнал» происходит от латинского слова «*signum*», который обозначает знак, физический процесс (явление), несущий сообщение (информацию) о каком-либо событии. Первоначально под информацией, происходящей от латинского слова «*informatio*» (разъяснение, изложение), понимали обмен сведениями между людьми устным, письменным или другим способом. С середины XX века термин «информация» принял общенаучное понятие, включающее обмен сведениями между людьми, человеком и автоматом, автоматом и автоматом. Из определений видно различие между понятиями «сигнал» и «информация». Таким образом, применительно к вопросам радиотехники под **сигналом** будем понимать физический процесс или явление, позволяющие транспортировать информацию (сообщение) из одной точки пространства в другую с использованием различных радиотехнических устройств и линий связи. При этом в ходе дальнейшего изложения материала радиотехнические сигналы будем просто называть сигналом.

Под **первичным сигналом** понимают электрический сигнал, полученный на выходе преобразователя сообщения в электрический сигнал. Один или несколько параметров первичного сигнала, значения которых однозначно отображают передаваемое сообщение, называют **представляющими** (информационными) параметрами, например:

- амплитуда, частота или фаза гармонического сигнала;
- непрерывная или дискретная последовательность выборочных (мгновенных) значений первичного сигнала;

- амплитуда, длительность или период следования импульсов и т.д.

К основным характеристикам первичного сигнала можно отнести следующее.

1. **Длительность первичного сигнала** T_c , которая определяет некоторый интервал времени, в пределах которого существует сигнал.

2. **Средняя мощность первичного сигнала** $u(t)$ за интервал усреднения T определяется выражением:

$$P_{cp} = \frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt. \quad (1.1)$$

3. **Максимальная мощность первичного сигнала** P_{max} представляет собой мощность эквивалентного гармонического сигнала с амплитудой $U_{m max}$, которая превышает мгновенными значениями переменной составляющей первичного сигнала $u(t)$ с достаточно малой вероятностью $\varepsilon = 10^{-2} - 10^{-5}$.

4. **Минимальная мощность первичного сигнала** P_{min} представляет собой мощность эквивалентного гармонического сигнала с амплитудой $U_{m min}$, которая может превышать мгновенными значениями переменной составляющей сигнала $u(t)$ с достаточно большой вероятностью $(1 - \varepsilon)$.

5. **Динамический диапазон первичного сигнала** D_c отражает разброс мощностей первичного сигнала в конкретной точке канала связи:

$$D_c = 10 \lg \frac{P_{max}}{P_{min}}, \text{ дБ}. \quad (1.2)$$

6. **Пик-фактор первичного сигнала** Q_c отражает превышение максимальной мощности сигнала над средней мощностью сигнала:

$$Q_c = 10 \lg \frac{P_{max}}{P_{cp}}, \text{ дБ}. \quad (1.3)$$

7. **Защищенность первичного сигнала** A_3 отражает превышение средней мощности сигнала (1.1) над средней мощностью помехи P_n :

$$A_n = 10 \lg \frac{P_{cp}}{P_n}, \text{ дБ}. \quad (1.4)$$

8. **Спектр реального сигнала** занимает бесконечно широкую полосу частот. В тоже время , всегда можно указать диапазон частот, в пределах которого сосредоточена основная энергия сигнала:

$$F_c = F_{\max} - F_{\min}, \quad (1.5)$$

где F_{\max} и F_{\min} – максимальная и минимальная частоты первичного сигнала.

9. **Объем первичного сигнала** V_c в соответствии с (1,2) и (1.5) определяется выражением

$$V_c = D_c T_c F_c, \text{ дБ}. \quad (1.6)$$

1.2. Классификация радиотехнических сигналов

Рассмотрим классификацию сигналов относительно различных критериев их оценки и сравнения. При этом учтем следующее:

- сигнал предназначен для транспортировки информации из одной точки пространства в другую;
- для придания сигналу свойств переносчика информации его необходимо модулировать (определить закон изменения одного из параметров сигнала);
- в соответствии с методами математического описания сигналов последние можно разделить на простые, которые описываются элементарными функциями (уравнение прямой, тригонометрические функции $\sin x$, $\cos x$, экспоненциальные функции и т.д.), и сложные сигналы, математическое описание которых требует как специальных функций, так и своего подхода к описанию сигналов;
- физические параметры сигналов могут зависеть от времени, частоты или/и пространственных координат.

Для классификации сигналов можно принять различные критерии.

Первичные сигналы можно классифицировать по виду передаваемых сообщений. Это – **аналоговые, дискретные, цифровые, случайные, узкополосные и широкополосные сигналы** и т.д.

Сигнал, представляющий ток в электрической цепи, отражает направление и количество заряда, переносимого в единицу времени. Звук,

излучаемый электроакустической системой, представляет собой временную зависимость звукового давления. Напряжение на выходе микрофона отражает собой пространственно-временную зависимость звукового давления на мембрану микрофона. Распределение сигнала на поверхности приемной антенны зависит от направления прихода сигнала.

В соответствии с этим, в качестве первого классификационного признака сигналов можно использовать вид физического явления, выступающего в роли носителя информации: заряд, ток, напряжение, звуковое давление, интенсивность света и т.д. В радиотехнических устройствах в роли носителя информации рассматривают ток (i , I) или напряжение (u , U), зависящие от времени t или частоты f . При этом различают аналоговые, импульсные и случайные сигналы.

Аналоговые сигналы представляют собой сигналы, значения которых в каждый момент времени могут быть точно предсказаны (измерены). Подобные сигналы подобны физическим процессам, их поражающих. Одномерный аналоговый сигнал может быть как непрерывным (рис.1.1,а), так и с точками разрыва (импульсный сигнал в пределах одного импульса).

Импульсные сигналы представляют собой процессы, существующие лишь в пределах конечного отрезка времени. Здесь различают видеоимпульсы (рис.1.1,б) и радиоимпульсы (рис.1.1,в). Они отличаются следующим. Если функция $u_B(t)$ описывает форму видеоимпульса, то тогда радиоимпульс, соответствующий этому видеоимпульсу, будет представлять собой высокочастотное заполнение $u_P(t) = u_B(t) \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ в пределах огибающей видеоимпульса $u_B(t)$, где ω_0 — круговая частота, а φ_0 — начальная фаза высокочастотного колебания. Функция $u_B(t)$ называется огибающей радиоимпульса, а функция $\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ его заполнением с несущей частотой ω_0 .

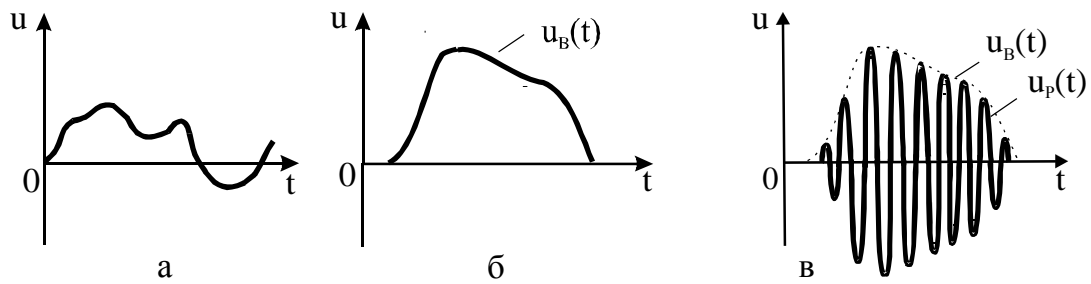


Рис.1.1. Непрерывный сигнал (а), видеоимпульс (б), радиоимпульс (в)

Достаточно долго в радиотехнике использовались аналоговые сигналы. Со временем на смену и в дополнение к ним в ряде случаев пришли импульсные и дискретные сигналы, используемые в цифровых устройствах и устройствах автоматики. Под **импульсным** сигналом понимают детерминированный сигнал, энергия которого отлична от нуля в течение ограниченного интервала времени, а под **дискретным** – сигнал, принимающий конечное множество значений в заданном диапазоне и в определенном интервале времени. Простейшая математическая модель дискретного сигнала $s_d(t)$ представляет счетное множество точек $\{t_j\}$ (j — целое число) на оси времени, в каждой из которых определено значение сигнала s_j . Шаг взятия выборок (**шаг дискретизации**) $\Delta t = t_{j+1} - t_j$, как правило, выбирают постоянным (рис.1.2). Преимущество дискретных сигналов перед аналоговыми сигналами заключается в том, что не требуется отслеживать форму сигнала во все моменты времени, необходим лишь сам факт наличия или отсутствия импульса.

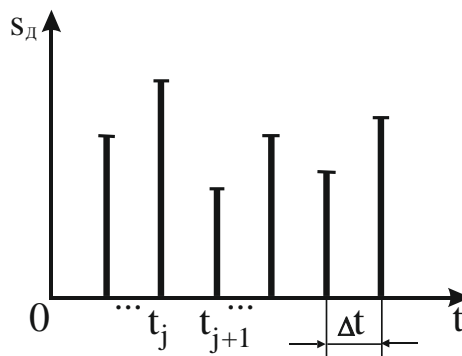


Рис.1.2. Модель дискретного сигнала

Цифровыми называют сигналы, у которых счетное множество значений одного из представляющих параметров описывается

ограниченным набором кодовых комбинаций (например, телеграфные сигналы, сигналы передачи данных).

Случайные сигналы представляют собой различные флуктуационные процессы, значения которых в конкретные моменты времени можно предсказать только с вероятностью меньше единицы. Зачастую эти сигналы проявляют себя как помехи и препятствуют извлечению информации из принятого колебания.

Размерность пространства, в котором существует сигнал, можно рассматривать в качестве третьего классификационного признака сигналов. Ток или напряжение в радиотехнических устройствах в большинстве случаев можно рассматривать как одномерный сигнал, зависящий от времени. Распределение токов и напряжений в длинной линии представляет сигнал, зависящий как от времени, так и от пространственных координат. Звуковое давление, в зависимости от целей, которые преследуются, можно рассматривать как одно-, двух-, трех- и четырехмерный сигнал, зависящий от времени и одной, двух и трех пространственных координат.

Рассмотренные сигналы можно изучать с помощью различных приборов и устройств (осциллограф, вольтметр, приемник). Однако наблюдаемые с помощью приборов явления всегда выступают как частные проявления. Это не позволяет говорить об их свойствах, предсказывать поведение сигналов в пространстве и времени. Для устранения этого недостатка необходимо построить математическую модель, описывающую сигнал. Это позволяет абстрагироваться от конкретной природы носителя сигнала и использовать одну и ту же математическую модель сигнала для описания различных явлений (тока, напряжения, напряженности электромагнитного поля и т. д.).

В теории сигналов существуют различные способы описания сигналов, например, в виде аналитических выражений или таблиц для аналоговых сигналов, в виде вероятностных функций для случайных процессов. В соответствии с этим сигнал можно классифицировать относительно математической формы их представления. Это делит сигналы на детерминированные и стохастические (случайные).

Детерминированными сигналами называются сигналы, значения параметров которых в любой момент времени являются известными точно или могут быть заранее вычислены. Слово «детерминизм» происходит от латинского слова *determinatio*. Оно означает определение, либо учение об объективной закономерной взаимосвязи и причинной обусловленности всех явлений. Анализ детерминированных сигналов базируется на использовании классической теории дифференциальных уравнений. Любая математическая модель, описывающая детерминированные сигналы, позволяет предсказывать их мгновенные значения в любые моменты времени с вероятностью равной единице.

Стохастические (случайные) сигналы представляют собой сигналы, мгновенные значения которых в любой момент времени являются случайными величинами. Слово "стохастический" происходит от греческого слова *stochastikos* – умеющий угадывать; случайный, вероятностный. Анализ этих сигналов базируется на теории вероятностей и теории случайных процессов. Значения случайных сигналов можно предсказать только с вероятностью меньше единицы.

Строго говоря, в природе детерминированных сигналов не существует. Это объясняется тем, что радиотехнические системы взаимодействуют с окружающими их физическими объектами, которые оказывают влияние на эти системы. В радиокомпонентах присутствуют хаотические тепловые флуктуации. Как правило, имеет место неполная информация о начальном состоянии системы. Все это заставляет рассматривать реальные сигналы как случайные функции времени.

При построении модели сигнала исследователь стремится описать те свойства сигналов, которые наиболее важны для него. Это позволяет исключить из рассмотрения второстепенные признаки сигналов и соответственно упростить модель. В то же время, опираясь на математические модели сигналов, можно сравнивать процессы, проводить классификацию, предсказывать их поведение в тех или иных условиях.

1.3. Описание детерминированных сигналов гармоническими функциями

Под *гармонической функцией* понимают функцию, значение которой во времени изменяется по синусоидальному или косинусоидальному законам. Подобная функция описывается следующим образом:

$$a(t) = A_m \cos(\omega t + \psi) = A_m \sin(\omega t + \psi'),$$

где A_m – *амплитуда* гармонической функции; ω – угловая частота (рад/с); ψ и ψ' – *начальные фазы* в косинусной и синусной формах соответственно; $\psi' = \psi + \pi/2$; $\theta = \omega t + \psi$ – *мгновенная фаза* в косинусной форме; $\theta' = \omega t + \psi' = \theta + \pi/2 = \omega t + \psi + \pi/2$ – мгновенная фаза в синусной форме.

Под угловой частотой понимают скорость изменения мгновенной фазы

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}.$$

Гармоническая функция – функция периодическая:

$$a(t) = a(t \pm nT),$$

где $n = 0, 1, 2, \dots$ – произвольное целое число; T – *период* (с), являющийся наименьшим промежутком времени, через который повторяется значение функции.

Величина, обратная периоду, называется *электрической частотой*:

$$f = 1/T \text{ (Гц)}.$$

Известно, что функция, например, $\cos(\theta)$ – периодическая функция от мгновенной фазы θ . Она изменяется с периодом 2π . В этом случае можно записать, что $\omega T = 2\pi$. Отсюда следует, что:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}; f = \frac{\omega}{2\pi}; \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f.$$

Интервал времени, в пределах которого гармоническая функция принимает положительные значения, называется *положительным полупериодом*, а отрицательные – *отрицательным полупериодом*.

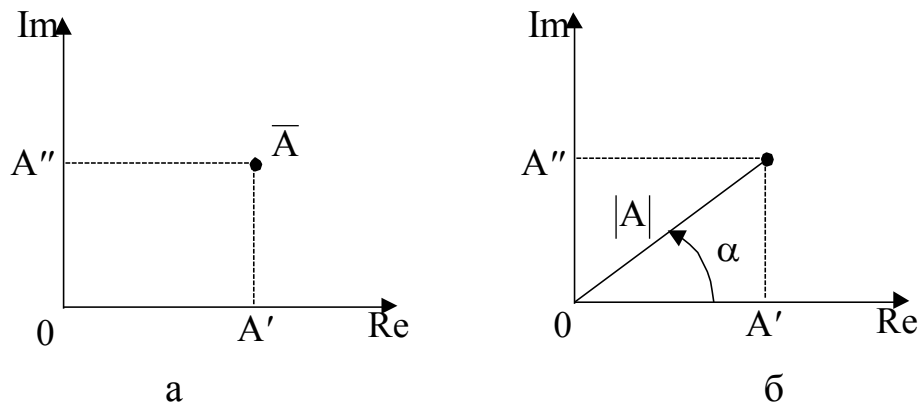


Рис. 1.4. Представление комплексного числа на комплексной плоскости (а), модуль и аргумент комплексного числа (б)

Модуль комплексного числа $|\bar{A}|$ на комплексной плоскости представляет собой расстояние (длину вектора) от начала координат до точки \bar{A} (рис. 1.4, б). Аргумент комплексного числа α на комплексной плоскости отражает угол наклона вектора, характеризующего $|\bar{A}|$, к оси абсцисс. Положительное направление отсчета угла α принято против часовой стрелки.

Вещественная часть A' является проекцией точки комплексного числа на ось абсцисс, а A'' – на ось ординат. В соответствии с этим вещественную и мнимую части комплексного числа можно выразить в виде

$$A' = \operatorname{Re}[\bar{A}] = |\bar{A}| \cos(\alpha), \quad A'' = \operatorname{Im}[\bar{A}] = |\bar{A}| \sin(\alpha).$$

В этом случае, в тригонометрической форме комплексное число представляется следующим образом:

$$\bar{A} = |\bar{A}| \cos(\alpha) + j|\bar{A}| \sin(\alpha).$$

Свойства комплексных чисел.

1. Два комплексных числа $\bar{A} = A' + jA'' = |\bar{A}|e^{j\alpha_A}$ и

$\bar{B} = B' + jB'' = |\bar{B}|e^{j\alpha_B}$ равны между собой, если попарно равны их вещественные и мнимые части ($A' = B'$, $A'' = B''$) или равны их модули ($|\bar{A}| = |\bar{B}|$), а аргументы отличаются на $2n\pi$ ($\alpha_A - \alpha_B = \pm 2n\pi$).

2. Два комплексных числа $A = A' + jA''$ и $A^* = A' - jA''$ называются сопряженными, если их вещественные части равны между собой, а

мнимые части отличаются лишь знаком. Модули сопряженных комплексных чисел равны, а их аргументы отличаются лишь знаком:

$$\bar{A} = |A|e^{j\alpha}; \quad \bar{A}^* = |A|e^{-j\alpha}.$$

3. Сумма (разность) двух комплексных чисел имеет вид

$$\bar{A} + \bar{B} = (A' + jA'') + (B' + jB'') = (A' + B') + j(A'' + B'');$$

$$\bar{A} - \bar{B} = (A' + jA'') - (B' + jB'') = (A' - B') + j(A'' - B'').$$

Сумма двух комплексно-сопряженных чисел представляет собой действительное число, являющееся удвоенной вещественной частью комплексного числа

$$\bar{A} + \bar{A}^* = (A' + jA'') + (A' - jA'') = 2A'.$$

4. Умножение, деление и возведение в степень комплексных чисел при представлении их в показательной форме определяется следующими выражениями:

$$\bar{A} \cdot \bar{B} = |A|e^{j\alpha_A} \cdot |B|e^{j\alpha_B} = |A| \cdot |B| \cdot e^{j(\alpha_A + \alpha_B)};$$

$$\frac{\bar{A}}{\bar{B}} = \frac{|A|e^{j\alpha_A}}{|B|e^{j\alpha_B}} = \frac{|A|}{|B|} \cdot e^{j(\alpha_A - \alpha_B)};$$

$$\bar{A}^n = [\bar{A}e^{j\alpha_A}]^n = [\bar{A}]^n \cdot e^{jn\alpha_A}.$$

При умножении комплексного числа $\bar{A} = |A|e^{j\alpha_A}$ на вещественное число m приводит к увеличению модуля комплексного числа в m раз. В данном случае аргумент комплексного числа остается неизменным:

$$m\bar{A} = m|A|e^{j\alpha_A}.$$

5. При представлении комплексных чисел в алгебраической форме, их умножение и деление имеет вид

$$\bar{A} \cdot \bar{B} = (A' + jA'') \cdot (B' + jB'') = (A' \cdot B' - A'' \cdot B'') + j(A' \cdot B'' + A'' \cdot B');$$

$$\frac{\bar{A}}{\bar{B}} = \frac{A' + jA''}{B' + jB''} = \frac{(A' + jA'')(B' - jB'')}{(B' + jB'')(B' - jB'')} = \frac{A'B' + A'' \cdot B''}{|B'|^2} + j \frac{A''B' - A'B''}{|B''|^2}.$$

Сигнал, изменяющийся по гармоническому закону $s(t) = A_m \cos(\omega t + \varphi)$, с учетом понятия и свойств комплексных чисел можно представить в виде мгновенного комплекса

$$\tilde{s}(t) = A_m \exp[j(\omega t + \varphi)], \quad (1.7)$$

где A_m, ω, φ – амплитуда, частота и начальная фаза гармонической функции соответственно.

Комплексно-сопряженный мгновенный комплекс в соответствии с (1.7) имеет вид

$$\tilde{s}^*(t) = A_m \exp[-j(\omega t + \varphi)]. \quad (1.8)$$

Исключая из выражений (1.7) и (1.8) единичный вектор вращения $\exp(j\omega t)$ или $\exp(-j\omega t)$, получим комплексную

$$\dot{S} = A_m \exp(j\varphi) \quad (1.9)$$

и комплексно-сопряженную

$$\dot{S}^* = A_m \exp(-j\varphi) \quad (1.10)$$

амплитуды от гармонической функции.

При необходимости вернуться от комплексной амплитуды сигнала, представляющей собой постоянное число, к мгновенному комплексу необходимо комплексную амплитуду умножить на единичный вектор вращения $\exp(j\omega t)$. Это же относится и к комплексно-сопряженной комплексной амплитуде при том, что умножение осуществляется на единичный вектор вращения вида $\exp(-j\omega t)$.

1.5. Описание сигналов разрывными функциями

При проведении анализа сложных сигналов и при анализе прохождения сложных сигналов через радиотехнические цепи возникает необходимость описания сигналов в виде математических выражений. Импульсные сигналы могут быть описаны с использованием разрывных функций. Например, на рис. 1.5,а приведен прямоугольный импульс, который описывается следующей функцией

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0; \\ U_{\Pi} & \text{при } 0 \leq t \leq \tau_{\Pi}; \\ 0 & \text{при } t > \tau_{\Pi}, \end{cases}$$

где U_{Π} – амплитуда, а τ_{Π} – длительность прямоугольного импульса.

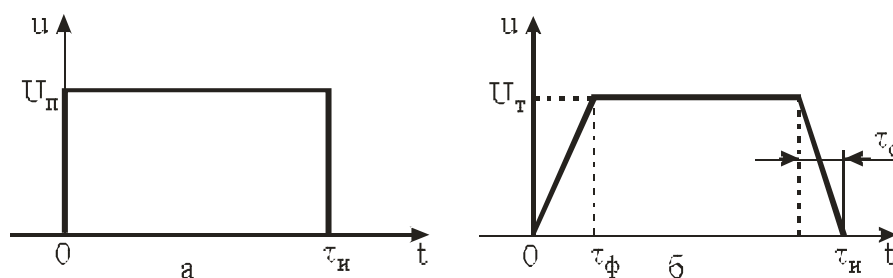


Рис. 1.5. Прямоугольный (а) и трапецеидальный (б) импульсы

Для трапецеидального импульса (рис. 1.5,б) справедливо аналитическое определение в виде

$$\begin{cases} 0 & \text{при } t < 0; \\ U_T \frac{t}{\tau_\phi} & \text{при } 0 \leq t \leq \tau_\phi; \\ U_T & \text{при } \tau_\phi \leq t \leq \tau_n - \tau_c; \\ U_T \left(1 - \frac{t - \tau_n + \tau_c}{\tau_c}\right) & \text{при } \tau_n - \tau_c \leq t \leq \tau_n; \\ 0 & \text{при } t \geq \tau_n, \end{cases}$$

где U_T – амплитуда импульса; τ_ϕ – длительность фронта (переднего) импульса; τ_c – длительность среза (заднего фронта) импульса; τ_n – длительность импульса.

Из приведенных примеров видно, что, проводя разбиение сложного сигнала на отдельные части в разные моменты времени, описываемые простейшими функциями (уравнения прямой, тригонометрические функции, экспоненциальные функции и т.д.), можно получить формулу для описания сложного сигнала.

1.6. Динамическое описание сигналов

При анализе сигналов, применительно к радиотехническим устройствам, либо системам связи, отклик устройства на произвольное входное воздействие в достаточно широком временном диапазоне можно представить суммой элементарных сигналов, возникающих в последовательные моменты времени. Устремляя к нулю длительность этих элементарных сигналов, в пределе получают точное описание сигнала аналитическим выражением. Подобный метод описания сигналов

получил название **динамический**, что говорит о зависимости вычислительного процесса от времени.

На практике широко используют два метода динамического описания сигналов. В первом методе в качестве элементарных сигналов используют ступенчатые функции, возникающие через равные промежутки времени Δt (рис. 1.6,а). Высота каждой ступеньки $\Delta s_j = s_j - s_{j-1}$, $j=1,2,\dots$ равна приращению сигнала за время Δt . Во втором методе в качестве элементарных сигналов используют прямоугольные импульсы одинаковой длительности Δt , но с высотой s_j , соответствующей аналоговому сигналу в момент времени $t_j = j\Delta t$, $j=0,1,2,\dots$ (рис. 1.6,б).

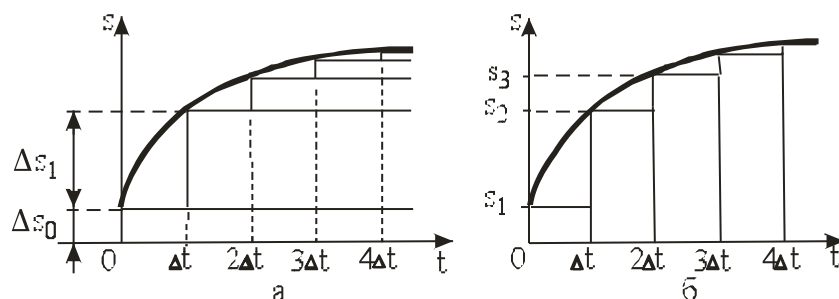


Рис. 1.6. Динамическое описание сигналов на базе ступенчатых (а) и импульсных (б) функций

В основе методов динамического описания сигналов лежат две функции: функция включения (функция Хевисайда) и дельта-функция (δ -функция). Рассмотрим эти функции.

Функция включения (функция Хевисайда). Допустим, что задан сигнал (рис.1.7,а), математическая модель которого описывается выражением

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < -\xi/2; \\ (1 + 2t/\xi)/2 & \text{при } -\xi/2 \leq t \leq \xi/2; \\ 1 & \text{при } t > \xi/2. \end{cases}$$

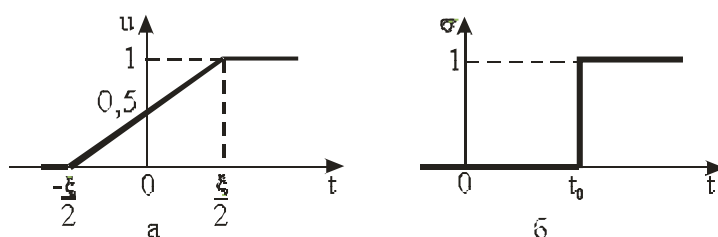


Рис. 1.7. Линейный закон передачи (а) и функция Хевисайда (б)

Подобная функция отражает линейный закон перехода некоторого физического процесса из нулевого состояния в единичное состояние за время ξ . Математическая модель подобного перехода при ξ , стремящемся к нулю, получила название функции включения или функции Хевисайда. Ее описание имеет вид

$$\sigma(t-t_0) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < t_0; \\ 1 & \text{при } t \geq t_0, \end{cases} \quad (1.11)$$

где t_0 – время, которое характеризует смещение функции включения относительно начала координат (рис.1.7,б).

К основным свойствам функции включения относят следующие.

1. Функция включения позволяет получить аналитическое представление о поведении произвольных сигналов $s(t)$ до и после коммутации

$$s(t)\sigma(t-t_0) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < t_0; \\ s(t) & \text{при } t \geq t_0, \end{cases} \quad (1.12)$$

т.е. до и после того, как функция включения (1.11) приобретет единичное значение. Из выражения (1.12) видно, что функция включения, как бы включает произвольную функцию в момент времени t_0 . Кроме того, рассмотренное свойство позволяет определить для функции включения амплитуду.

2. Разность $\sigma(t) = \sigma_1(t) - \sigma_2(t)$ двух функций включения $\sigma_1(t) = \sigma(t-t_0)$ и $\sigma_2(t) = \sigma(t-t_0-\tau_{\text{и}})$ позволяет описать импульсный сигнал $s(t)$ длительностью $\tau_{\text{и}}$ и моментом появления t_0 (рис. 1.8)

$$s(t) = s_1(t) - s_2(t) = A[\sigma_1(t) - \sigma_2(t)] = A[\sigma(t-t_0) - \sigma(t-t_0-\tau_{\text{и}})] \quad (1.13)$$

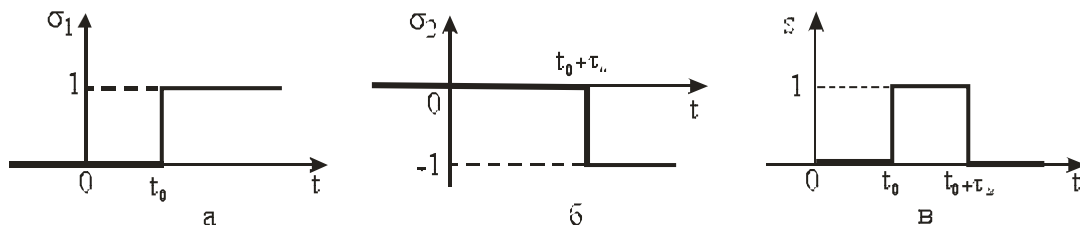


Рис.1.8. Формирование импульсного сигнала (в) с использованием двух функций включения $\sigma_1(t)$ (а) и $\sigma_2(t)$ (б)

Описание импульсных сигналов с использованием функций включения широко используется в теории радиотехнических сигналов и при анализе радиотехнических устройств.

Используя свойства функции включения, можно представить аналоговый сигнал $s(t)$ в виде последовательности прямоугольных видеоимпульсов, следующих друг за другом через равные временные интервалы Δt (рис. 1.9). Подобное относительно каждого импульса можно выполнить следующим образом.

Импульсы, следующие с интервалом Δt , в конкретные моменты времени формируются как разность двух функций включения (1.13). В момент формирования импульса производится оценка интенсивности аналогового сигнала $s(t)$. Значение интенсивности аналогового сигнала используется в виде амплитуды импульса

$$s_d = \sum_{k=0}^n A_k [\sigma_1(t - k\Delta t) - \sigma_2(t - k\Delta t - \tau_n)],$$

где A_k – амплитуда импульса, совпадающая с интенсивностью аналогового сигнала в момент времени $k\Delta t$.

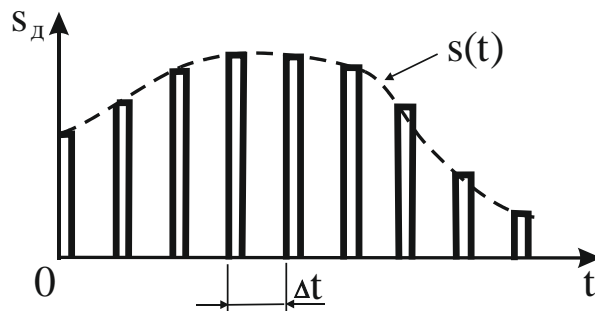


Рис.1.9. Представление аналогового сигнала последовательностью прямоугольных импульсов

Дельта-функция (Функция Дирака). Рассмотрим импульсный сигнал прямоугольной формы как разность двух функций включения

$$v(t) = \frac{1}{\xi} \left[\sigma \left(t + \frac{\xi}{2} \right) - \sigma \left(t - \frac{\xi}{2} \right) \right].$$

Амплитуда импульса равна $1/\xi$, а

длительность – ξ (рис. 1.10,а). В данном случае при любом параметре ξ площадь импульса длительностью ξ и амплитудой $1/\xi$ равна единице

$\Pi_v = \int_{-\infty}^{\infty} v dt = 1$. Соответственно в случае, когда значение ξ будет стремиться к нулю, длительность импульса сокращается и стремится к нулю.

Функция $v(t)$ при значении ξ стремящемся к нулю называется – функцией (функцией Дирака) (рис. 1.10,б)

$$\delta(t - t_0) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \neq t_0; \\ \infty & \text{при } t = t_0. \end{cases}$$

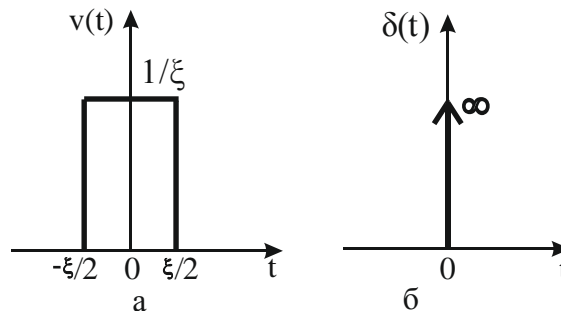


Рис.1.10. Прямоугольный импульс (а) и символьное изображение δ -функции (б)

Дельта-функция равна нулю всюду в рамках временной оси, кроме точки $t = t_0$, при этом она обладает единичным интегралом $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$. В связи с этим можно заключить, что δ – функция является математической моделью бесконечно короткого по длительности импульса с бесконечно большой амплитудой.

Функция включения и δ -функция связаны между собой следующими соотношениями:

$$\sigma(t - t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) dt, \quad (1.14)$$

$$\delta(t - t_0) = \frac{d}{dt} \sigma(t - t_0). \quad (1.15)$$

Из этих соотношений видно, что функция включения представляет собой интеграл от δ - функции, а δ -функция – производную от функции включения.

Основным свойством δ -функции можно назвать фильтрующее свойство

$$s(t)\delta(t-t_0) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \neq t_0; \\ s(t_0) & \text{при } t = t_0. \end{cases} \quad (1.16)$$

Это свойство при построении моделей сигналов, с использованием δ -функции, позволяет отследить значение произвольного сигнала $s(t)$ в заданный момент времени $t = t_0$. Из выражения (1.16) можно видеть, что во всех точках временной оси, кроме точки $t = t_0$, значение произведения δ -функции на произвольную функцию $s(t)$ равно нулю.

1.6.1. Динамическое представление сигнала функцией включения

Рассмотрим произвольный непрерывный сигнал $s(t)$ (рис.1.11). Разобьем ось времени на дискретные моменты $t_k = k\Delta t$, $k \geq 1$. Эти моменты времени кратны постоянному шагу дискретизации (взятия выборок сигнала $s(t)$) Δt . Пусть в момент времени $t = 0$ значение сигнала равно $s_0 = s(t=0)$. Соответственно в момент времени t_k сигнал $s(t)$ принимает значение $s_k = s(t_k)$. В этом случае текущее значение сигнала при времени $t_{k-1} < t \leq t_k$ приблизительно равно сумме функций включения, амплитуды которых равны разности значений s_k и s_{k-1} функции $s(t)$ в моменты времени t_k и t_{k-1} . В соответствии с этим можно записать

$$\begin{aligned} s(t) &\approx s_0\sigma(t) + (s_1 - s_0)\sigma(t - \Delta t) + (s_2 - s_1)\sigma(t - 2\Delta t) + \dots = \\ &= s_0\sigma(t) + \sum_{k=1}^{\infty} (s_k - s_{k-1})\sigma(t - k\Delta t) \end{aligned}$$

В полученном выражении, устремим временной интервал Δt к нулю. В этом случае дискретная переменная $k\Delta t$ может быть заменена непрерывной переменной τ . Малые приращения $\Delta s_k = s_k - s_{k-1}$, характеризующие амплитуды функций включения представляются в виде $ds = (ds/d\tau)d\tau$. Подобные преобразования позволяют получить формулу

динамического представления произвольного сигнала с использованием функций включения:

$$s(t) = s_0 \sigma(t) + \int_0^{\infty} \frac{ds}{d\tau} \sigma(t - \tau) d\tau. \quad (1.17)$$

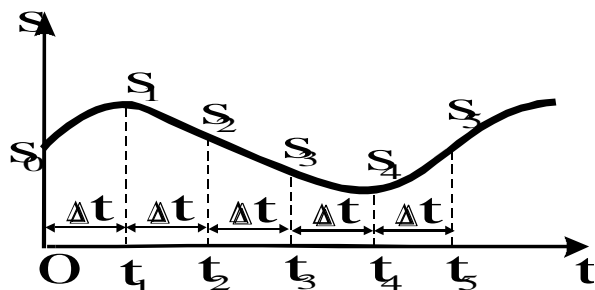


Рис.1.11. Динамическое представление сигнала функцией включения

1.6.2. Динамическое представление сигнала дельта-функцией

Рассмотрим некоторый произвольный непрерывный сигнал $s(t)$. Этот сигнал в моменты времени $t_{k-1} \leq t \leq t_k$, в соответствии со свойствами функций включения, может быть представлен в виде суммы элементарных импульсов $\eta_k(t) = s_k [\sigma(t - t_k) - \sigma(t - t_k - \Delta t)]$, где амплитуды импульсов равны $s_k = s(t_k)$:

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \eta_k(t). \quad (1.18)$$

В выражении (1.18), описывающем сигнал $s(t)$, в виде суммы импульсов в моменты времени $t_{k-1} \leq t \leq t_k$, не равным нулю будет только один член, соответствующий k -му отсчету.

Подставляя в (1.18) значение элементарного импульса, описываемого разностью функций включения, и производя деление и умножение выражения на величину шага взятия отсчетов Δt , будем иметь

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s_k \left[\frac{\sigma(t - t_k) - \sigma(t - t_k - \Delta t)}{\Delta t} \right] \Delta t. \quad (1.19)$$

В выражении (1.19) устремим шаг взятия отсчетов Δt к нулю. В этом случае дискретную переменную Δt можно заменить переменной dt .

Сомножитель в квадратных скобках, переходя к пределу, будет представлять собой δ -функцию

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\sigma(t - \tau) - \sigma(t - \tau - \Delta t)}{\Delta t} = \delta(t - \tau).$$

В результате этого в выражении (1.19) суммирование можно заменить интегрированием по переменной τ . В результате подобных преобразований получим формулу динамического представления сигнала с использованием δ -функции

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \delta(t - \tau) d\tau. \quad (1.20)$$

1.7. Функциональные пространства сигналов

При математическом описании сигналов их удобно рассматривать как векторы или точки в пространстве сигналов.

На практике при анализе радиотехнических устройств часто используют сложные по форме сигналы, которые невозможно наглядно представить в виде векторов. Однако сложные сигналы могут быть представлены в виде суммы более простых сигналов

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \varphi_k(t), \quad (1.21)$$

где α_k – коэффициенты пропорциональности; $\varphi_k(t)$ – простые функции из соответствующего базиса; $k = 0, 1, 2, \dots$ – целое число.

Простые сигналы $\varphi_k(t)$ и соответственно сложные сигналы, им соответствующие, могут быть представлены в виде набора (суммы) векторов.

В соответствии с принципом суперпозиции анализ радиотехнических устройств может быть проведен относительно каждого из простых сигналов, а отклик получен как сумма откликов относительно множества простых сигналов.

В трехмерном пространстве (рис. 1.12) разложение сложного сигнала на простейшие сигналы сходно с разложением вектора \mathbf{x} трехмерного пространства по координатам ортогонального единичного базиса ($\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$):

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{i} + x_2 \mathbf{j} + x_3 \mathbf{k}. \quad (1.22)$$

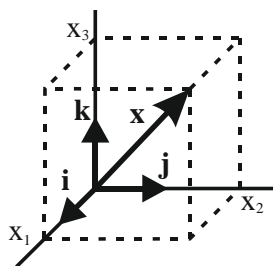


Рис. 1.12. Разложение вектора \mathbf{x} по координатным осям трехмерной ортогональной системы координат

Коэффициенты x_1 , x_2 , x_3 являются проекциями вектора \mathbf{x} на оси координат. Они полностью определяют вектор \mathbf{x} (1.22), являясь векторами $x_1 \mathbf{i}$, $x_2 \mathbf{j}$ и $x_3 \mathbf{k}$.

Положения трехмерного ортогонального пространства можно перенести на n -мерное пространство. Это позволяет представить сложный сигнал в виде суммы простых сигналов (1.21). Рассмотрим пример применительно к рис. 1.13.

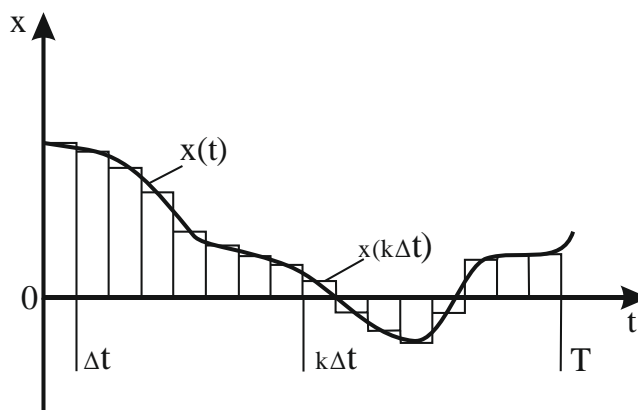


Рис. 1.13. Представление непрерывной функции $x(t)$ последовательностью прямоугольных импульсов

Имеется непрерывный сигнал $x(t)$. С определенной точностью его можно представить последовательностью прямоугольных импульсов, амплитуды $x(k\Delta t)$ которых определяются интенсивностью непрерывного сигнала в пределах временных интервалов $\{(k+1)\Delta t - k\Delta t\} = \Delta t$. В данном случае прямоугольные импульсы можно рассматривать как простейшие сигналы с амплитудой $x(k\Delta t)$ и длительностью Δt . Тогда исходный сигнал $x(t)$ на временном интервале $\{0, T\}$ условно представляется вектором в n -

мерном пространстве. Число координат $x_k = x(k\Delta t)$ этого вектора определяется выражением $n = T/\Delta t$. Учитывая (1.21) и по аналогии с (1.22), сигнал $x(t)$ можно представить в виде суммы:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{n-1} x_k \varphi_k(t), \quad (1.23)$$

где $\varphi_k(t) = \varphi(t - k\Delta t)$ – базисные функции, отвечающие условиям:

$$\varphi_k(t) = \begin{cases} 1, & t \in [(k-1)\Delta t, k\Delta t]; \\ 0, & t \notin [(k-1)\Delta t, k\Delta t]; \end{cases} \quad \frac{1}{\Delta t} \int_{(k-1)\Delta t}^{k\Delta t} \varphi_k^2(t) dt = 1.$$

Понятие «пространство», использованное при трактовке описания сигнала (1.23), позволяет придать множеству сигналов геометрический смысл и соответственно наглядность при анализе последних.

Применительно к сигналам можно рассматривать различные виды пространств. Остановимся на этом.

Линейное (векторное) пространство сигналов. Допустим, имеется некоторое множество сигналов $M = \{s_1(t), s_2(t), s_3(t), \dots\}$. Эти сигналы объединены между собой некоторыми общими свойствами и физическими параметрами, что говорит о наличии некоторой структуры сигналов. Это говорит о том, что одни сигналы из этого множества могут образовывать другие сигналы. Применительно к электрическим сигналам можно вести разговор о сложении сигналов друг с другом и соответственно получении новых сигналов множества. Кроме того, сигналы из множества могут умножаться на произвольный масштабный коэффициент. Это позволяет ввести в множество сигналов структуру линейного пространства. С учетом того, что сигналы можно представить векторами n -мерного пространства, то тогда для элементов линейного пространства можно записать следующие правила:

а) если некоторой функции $x(t)$ соответствует вектор $\mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)$, а функции $y(t)$ – вектор $\mathbf{y} = (y_0, y_1, y_2, \dots, y_n)$, то сумме этих векторов будет соответствовать вектор $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_0 + y_0, x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$;

б) если некоторой функции $x(t)$ соответствует вектор $\mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)$ и имеется скалярная величина γ , то тогда для них существует произведение $\gamma\mathbf{x} = (\gamma x_0, \gamma x_1, \gamma x_2, \dots, \gamma x_n)$;

в) в линейном пространстве существует нулевой элемент $\mathbf{x} + 0 = \mathbf{x}$;

г) каждому вектору \mathbf{x} линейного пространства можно поставить в соответствие противоположный вектор $-\mathbf{x}$, таким образом, что $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = 0$.

В рамках линейного пространства можно ввести к рассмотрению множество векторов $\{\varphi_k\}$, образующих линейно независимый базис. Тогда, с учетом скалярных коэффициентов x_k , отражающих координаты вектора \mathbf{x} , вектор \mathbf{x} можно представить в виде

$$\mathbf{x} = \sum_{k=0}^{n-1} x_k \varphi_k. \quad (1.24)$$

Множество векторов $\{\varphi_k\}$ образует линейно независимый базис, если условие

$$\sum_{k=0}^{n-1} x_k \varphi_k = 0 \quad (1.25)$$

выполняется только тогда, когда все $x_k = 0$.

Метрическое пространство. Метрическим пространством называют линейное пространство, в рамках которого определено расстояние $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ между векторами \mathbf{x} и \mathbf{y} пространства (т.е. определена метрика). Таким образом, в метрическом пространстве определено некоторое неотрицательное число $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ и способ определения этого числа, называемого расстоянием.. Расстояние (метрика) должно отвечать следующим условиям:

а) $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$, если $\mathbf{x} = \mathbf{y}$;

б) $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{y}, \mathbf{x})$;

в) $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + d(\mathbf{z}, \mathbf{y})$,

где \mathbf{x}, \mathbf{y} и \mathbf{z} – вектора пространства.

Свойства (а) и (б) метрического пространства очевидны. Свойство (в) называют неравенством треугольника. Это неравенство говорит о том, что длина одной стороны треугольника меньше (или равна) суммы длин двух других сторон треугольника.

Нормированное пространство. Нормированные пространства занимают важное место среди линейных метрических пространств. Они

характеризуются тем, что в них задается норма вектора $\|\mathbf{x}\|$, которая удовлетворяет следующим аксиомам:

- а) $\|\mathbf{x}\| \geq 0$;
- б) $\|\gamma\mathbf{x}\| = |\gamma| \cdot \|\mathbf{x}\|$;
- в) $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$,

где γ — постоянная величина.

Аксиома (а) говорит о том, что норма вектора является положительной величиной. При этом норма вектора равна нулю только тогда, когда рассматривается нулевой вектор. Аксиома (б) говорит о том, что умножение вектора на скалярную (постоянную) величину γ равно умножению нормы вектора на модуль от скаляра $|\gamma|$. Аксиому (в) называют аксиомой треугольника. Она говорит о том, что норма от суммы двух векторов меньше или равна сумме норм от отдельных этих двух векторов. Знак равенства будет иметь смысл, если векторы имеют одно направление.

Вещественное евклидово n -мерное пространство. Это пространство обозначается R^n . Под евклидовым понимают конечномерное вещественное векторное пространство, образуемое совокупностью векторов, с введенным на нем положительно определенным скалярным произведением, представляемым вещественной функцией вида $(*,*)$. Это пространство обладает следующими тремя свойствами:

а) билинейность: для любых векторов $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ и для любых вещественных чисел a, b выполняются условия:

$$(a\mathbf{u} + b\mathbf{v}, \mathbf{w}) = a(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + b(\mathbf{v}, \mathbf{w});$$

$$(\mathbf{u}, a\mathbf{v} + b\mathbf{w}) = a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{u}, \mathbf{w});$$

б) симметричность: для любых векторов \mathbf{u} и \mathbf{v} выполняется условие

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{v}, \mathbf{u});$$

в) положительная определённость: для любого вектора \mathbf{u} выполняется условие $(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq 0$, при этом скалярное произведение $(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0$ только в случае, когда $\mathbf{u} = 0$.

Любой вектор в n -мерном евклидовом пространстве определяется совокупностью его координат: $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$. Длина вектора \mathbf{x} определяется, как $\sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}$ и обозначается $\|\mathbf{x}\|$:

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\sum_{i=0}^{n-1} x_i^2}.$$

Таким образом, можно отметить, что норма вектора представляет собой длину вектора. Положительная определённость скалярного произведения говорит о том, что длина ненулевого вектора ненулевая. Из билинейности следует, что длины пропорциональных векторов пропорциональны $\|\mathbf{ax}\| = |\mathbf{a}|\|\mathbf{x}\|$.

В качестве примера n -мерного евклидова пространства можно рассмотреть координатное пространство R^n , состоящее из всевозможных n вещественных чисел $(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$. Скалярное произведение в этом пространстве определяется формулой $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=0}^{n-1} x_i y_i = x_0 y_0 + x_1 y_1 + \dots + x_{n-1} y_{n-1}$. Расстояние между двумя векторами определяется как норма разности векторов:

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{\sum_{i=0}^{n-1} (x_i - y_i)^2}.$$

Заданного на евклидовом пространстве скалярного произведения достаточно для того, чтобы ввести в рассмотрение еще одно геометрическое понятие как угол. Угол между векторами \mathbf{x} и \mathbf{y} определяется по формуле

$$\varphi = \arccos\left(\frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|}\right).$$

Из теоремы косинусов следует, что для двумерного евклидова пространства (евклидовой плоскости) данное определение угла совпадает с обычным. Ортогональные вектора как и в трёхмерном пространстве, можно определить как векторы, угол между которыми равен $\pi/2$.

Для определения угла φ необходимо, чтобы $\arccos\left(\frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|}\right)$ был определён. Это выполняется, если выполняется неравенство

$$\left|\arccos\left(\frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|}\right)\right| \leq 1.$$

Это неравенство называется неравенством Коши – Буняковского – Шварца и оно действительно выполняется в произвольном евклидовом пространстве. Из этого неравенства следует неравенство треугольника: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$. Неравенство треугольника, вместе с перечисленными выше свойствами длины, означает, что длина вектора является нормой на евклидовом векторном пространстве, а функция $d(x, y) = \|x - y\|$ задаёт на евклидовом пространстве структуру метрического пространства (эта функция называется евклидовой метрикой). В этом выражении знак равенства имеет смысл только тогда, когда

$$y = kx,$$

где k – скалярная величина.

Для соответствующих сигналов $x(t)$ и $y(t)$ это означает, что они совпадают по форме $y(t) = kx(t)$ и отличаются только масштабным коэффициентом k .

Ортонормированный базис в евклидовом (векторном) пространстве – это базис, состоящий из попарно ортогональных векторов единичной нормы. Ортонормированные базисы наиболее удобны для организации вычислений. Так, например, скалярное произведение векторов с координатами (a_1, a_2, \dots, a_n) и (b_1, b_2, \dots, b_n) в ортонормированном базисе представляется в виде $(a, b) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$.

В любом евклидовом пространстве существует ортонормированный базис. Выбрав в двух евклидовых пространствах ортонормированные базисы и переведя один из них в другой линейным отображением, можно доказать, что любые два евклидовых пространства одинаковой размерности изоморфны, т.е. отвечают следующим аксиомам:

1. $f(a + b) = f(a) + f(b)$;
2. $f(\lambda a) = \lambda f(a)$;
3. $ab = f(a)f(b)$

для любых векторов a, b и любой скалярной величины λ .

Существует множество различных обобщений понятия евклидова пространства. Например, заменяя поле вещественных чисел на поле комплексных чисел, можно получить определение эрмитова пространства.

Отказ от требования конечномерности обеспечивает переход от евклидова пространства к предгильбертову пространству.

Гильбертово пространство. При $n \rightarrow \infty$ евклидово пространство R^n переходит в бесконечномерное пространство Гильберта, которое обозначается L^2 . Гильбертово пространство – линейное (векторное) пространство над полем вещественных или комплексных чисел, в котором для любых двух элементов (векторов) x и y определено скалярное произведение (x, y) . Кроме того пространство является полным относительно метрики $d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{(x - y, x - y)}$. Если это условие не выполняется, то говорят о предгильбертовом пространстве. Однако большинство из известных и используемых пространств либо являются полными, либо могут быть пополнены. Таким образом, гильбертово пространство представляет собой полное нормированное пространство, норма которого $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ порождена положительно определённым скалярным произведением.

Норма в произвольном нормированном пространстве может порождаться некоторым скалярным произведением тогда и только тогда, когда выполнено следующее равенство (тождество) параллелограмма:

$$(\forall x, y \in H) \quad \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Пространство, удовлетворяющее тождеству параллелограмма, является вещественным. В этом случае скалярное произведение задаётся равенством

$$(x, y) = \left\| \frac{x + y}{2} \right\|^2 - \left\| \frac{x - y}{2} \right\|^2.$$

Если это пространство является комплексным, то отвечающее его норме скалярное произведение задаётся равенством

$$(x, y) = \left\| \frac{x+y}{2} \right\|^2 - \left\| \frac{x-y}{2} \right\|^2 + i \left\| \frac{x+iy}{2} \right\|^2 - i \left\| \frac{x-iy}{2} \right\|^2,$$

которое представляет собой поляризационное тождество.

Полнота пространства позволяет перейти к рассмотрению функционалов. Так, например, пространство для всех непрерывных комплексных функций аргумента t , заданных на интервале $\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$, определено скалярное произведение в виде

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \int_{-T/2}^{T/2} \dot{x}(t) \dot{y}^*(t) dt, \quad (1.26)$$

где $\dot{x}(t)$ – комплексная, а $\dot{y}^*(t)$ – комплексно-сопряженная функции аргумента t .

Квадрат нормы функции равен:

$$\|\mathbf{x}\|^2 = \int_{-T/2}^{T/2} \dot{x}(t) \dot{x}^*(t) dt = \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt. \quad (1.27)$$

Рассматривая это выражение, можно отметить следующее. Если сигнал $x(t)$ представляет собой вещественный ток, протекающий через сопротивление величиной 1 Ом или вещественное напряжение, падающее на сопротивлении 1 Ом, то тогда квадрат нормы (1.27) будет отражать энергию сигнала, поступающую в сопротивление:

$$\|\mathbf{x}\|^2 = \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt = E. \quad (1.28)$$

Если элементы гильбертова пространства являются вещественными сигналами, существующими на интервале $\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$, то тогда относительно энергии сигнала выполняется условие

$$E = \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt < \infty, \quad (1.29)$$

а гильбертово пространство обозначают в виде $L^2(T)$. В случае, когда $T \rightarrow \infty$, условие (1.29) может и не выполняться. Тогда рассматривают среднюю мощность сигнала, характеризующую скорость изменения энергии и для которой выполняется условие

$$P_{cp} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt < \infty. \quad (1.30)$$

Тогда с размерностью мощности, когда токи и напряжения рассматриваются на сопротивлении 1 Ом, скалярное произведение, например, относительно комплексных сигналов, будет иметь вид

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y})_P = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \dot{x}(t) \dot{y}^*(t) dt. \quad (1.31)$$

Квадрат расстояния между двумя векторами в вещественном гильбертовом пространстве определяется соотношениями:

$$d^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = \int_{-T/2}^{T/2} (x(t) - y(t))^2 dt, \quad (1.32)$$

если условие (1.29) выполняется;

$$d^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} (x(t) - y(t))^2 dt, \quad (1.33)$$

если условие (1.29) не выполняется.

Пространство Хемминга. Важную роль в теории кодирования и анализа цифровых сигналов играет пространство Хемминга. Его элементами (векторами) являются двоичные n -разрядные кодовые комбинации $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$. В качестве примера можно привести два вектора при $n=5$: $\mathbf{x} = (10110)$ и $\mathbf{y} = (11010)$.

Сложение векторов в пространстве Хемминга реализуется как поразрядное сложение элементов кодовой комбинации по модулю 2:

$$\begin{array}{r} \mathbf{x} + \mathbf{y} = 10110 \\ \phantom{\mathbf{x} + \mathbf{y} = } 11010 \\ \hline \phantom{\mathbf{x} + \mathbf{y} = } 01100. \end{array}$$

Пространство Хемминга определено над конечным полем $GF(q)$ (поле Галуа), состоящим из конечного числа элементов, где q определяет число элементов (мощность) поля. На практике наиболее часто используется $q=2$, что соответствует полю $GF(2)$. Это говорит о том, что множество скаляров, с которыми взаимодействует данное пространство, содержит 2 элемента: -1 (логическая единица) или 0 (логический ноль).

Скалярное произведение в пространстве Хемминга определяется в виде

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=0}^{n-1} (x_i, y_i)^2.$$

В данном случае сумма понимается в обычном смысле, а не по модулю 2. Тогда норма двоичного вектора будет равна:

$$\|\mathbf{x}\| = \sum_{i=0}^{n-1} x_i^2 = \sum_{i=0}^{n-1} x_i,$$

поскольку $1^2 = 1$ и $0^2 = 0$.

Можно видеть, что норма двоичного вектора определяется количеством содержащихся в нем 1. Эту норму называют также весом вектора W .

Расстояние в пространстве Хемминга имеет вид

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sum_{i=0}^{n-1} (x_i - y_i) = \sum_{i=0}^{n-1} (x_i \oplus y_i),$$

где знак \oplus обозначает суммирование по модулю 2.

В поле $GF(2)$ сложение по модулю 2 и вычитание по модулю 2 эквивалентно. Отсюда следует, что в пространстве Хемминга расстояние между двоичными векторами определяется по числу позиций кодовой комбинации, в которых вектора имеют разные символы.

1.8. Геометрические представления сигналов

Решая задачи, связанные с анализом и преобразованием радиотехнических сигналов, иногда бывает удобно представлять сигналы векторами некоторого векторного пространства. Это, как правило, часто позволяет упростить решение задачи. Рассмотрим это применительно к различным видам пространств, рассмотренным в данном учебном пособии.

Совокупность двух чисел x_1, y_1 определяет координаты вектора \mathbf{z} в двумерном пространстве (рис. 1.14).

Длина вектор \mathbf{z} равна его норме

$$d = \|\mathbf{z}\| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}. \quad (1.34)$$

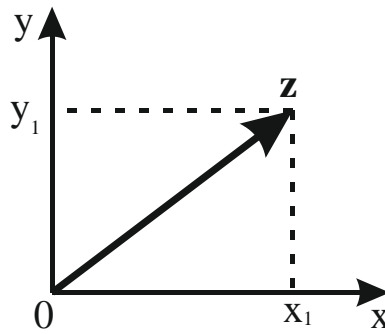


Рис. 1.14. Двумерный вектор

Расстояние между векторами \vec{z}_1 и \vec{z}_2 (рис. 1.15) определяется следующим выражением:

$$d(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2) = \|\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \quad (1.35)$$

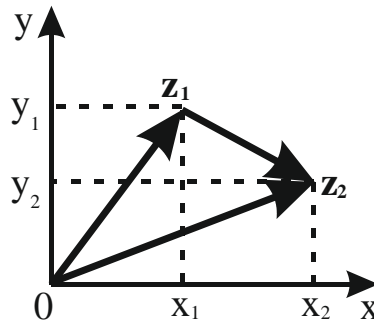


Рис. 1.15. Расстояние между двумя векторами

Скалярное произведение двух векторов определяется в виде

$$(\mathbf{z}_1 \cdot \mathbf{z}_2) = x_1 x_2 + y_1 y_2, \quad (1.36)$$

$$(\mathbf{z}_1 \cdot \mathbf{z}_2) = \|\mathbf{z}_1\| \cdot \|\mathbf{z}_2\| \cos(\alpha). \quad (1.37)$$

Выражение (1.36) определяет скалярное произведение через проекции векторов \mathbf{z}_1 и \mathbf{z}_2 на оси координат x и y , а выражение (1.37) определяет скалярное произведение через произведение длин векторов на косинус угла между ними.

Условие ортогональности векторов имеет вид

$$(\mathbf{z}_1 \cdot \mathbf{z}_2) = x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0. \quad (1.38)$$

Свойства n -мерного пространства являются обобщением свойств двумерного пространства. С учетом этого, используя выражения (1.34) – (1.38) для двумерного пространства, можно записать аналогичные выражения для n -мерного пространства.

Длина n -мерного вектора $\mathbf{u}(u_1, u_2, \dots, u_n)$ определяется в виде

$$d = \|\mathbf{u}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n u_i^2}.$$

Расстояние между двумя n -мерными векторами представляется нормой от разности двух векторов

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (u_i - v_i)^2}.$$

Скалярное произведение двух n -мерных векторов имеет вид

$$(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = \sum_{i=1}^n u_i v_i.$$

Развитием понятия векторного пространства является функциональное (гильбертово) пространство. Норма функции $u(t)$ определяется выражением

$$\|u(t)\| = \sqrt{\int_{-T/2}^{T/2} u^2(t) dt}, \quad (1.39)$$

где T — интервал времени, на котором определена функция $u(t)$.

Расстояние между функциями $u(t)$ и $v(t)$ равно норме от разности этих функций

$$\|u(t) - v(t)\| = \sqrt{\int_{-T/2}^{T/2} [u(t) - v(t)]^2 dt}.$$

Скалярное произведение двух функций $u(t)$ и $v(t)$ определяется в виде

$$(u, v) = \int_{-T/2}^{T/2} u(t)v(t) dt. \quad (1.40)$$

Если функции $u(t)$ и $v(t)$ ортогональны, то интеграл от их произведения имеет вид

$$\int_{-T/2}^{T/2} u(t)v(t)dt = 0.$$

1.9. Энергетические характеристики вещественных сигналов

К числу основных энергетических характеристик вещественного сигнала $s(t)$ относят следующее.

1. Мгновенная мощность P . Эта мощность определяется как квадрат мгновенного значения сигнала

$$P = s^2(t), \quad (1.41)$$

где $s(t)$ – напряжение (ток), прикладываемое к сопротивлению в 1 Ом.

2. Энергия W . Энергия на интервале времени (t_1, t_2) определяется следующим выражением:

$$W = \int_{t_1}^{t_2} s^2(t)dt. \quad (1.42)$$

3. Средняя мощность P_{cp} . Эта мощность определяется энергией сигнала, отнесенной к протяженности рассматриваемого интервала времени (t_1, t_2)

$$P_{cp} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} s^2(t)dt = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} s^2(t)dt, \quad (1.43)$$

где $T = t_2 - t_1$ – интервал времени, на котором задан сигнал.

В случае, когда сигнал $s(t)$ задан на бесконечном интервале времени, средняя мощность определяется в виде

$$P_{cp} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} s^2(t)dt.$$

Для двух сигналов $s_1(t)$ и $s_2(t)$, которые заданы на интервале времени (t_1, t_2) , энергия и средняя мощность имеют вид

$$W = \int_{t_1}^{t_2} [s_1(t) + s_2(t)]^2 dt = \int_{t_1}^{t_2} s_1^2(t) dt + \int_{t_1}^{t_2} s_2^2(t) dt + \\ + 2 \int_{t_1}^{t_2} s_1(t)s_2(t) dt = W_1 + W_2 + 2W_{12}; \quad (1.44)$$

$$P_{cp} = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} [s_1(t) + s_2(t)]^2 dt = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} s_1^2(t) dt + \\ + \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} s_2^2(t) dt + \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_2} s_1(t)s_2(t) dt = P_{cp1} + P_{cp2} + 2P_{cp12}, \quad (1.45)$$

где W_1 и W_2 – энергии первого и второго сигналов; P_{cp1} и P_{cp2} – средние мощности первого и второго сигналов; $2W_{12}$ – взаимная энергия первого и второго сигналов; $2P_{cp12}$ – взаимная средняя мощность первого и второго сигналов.

Энергия и мощность двух сигналов на произвольном интервале времени могут быть как равными сумме мощностей (энергий) этих сигналов (взаимная энергия или взаимная мощность двух сигналов равны нулю), так и неравными, когда взаимная энергия (средняя мощность) не равна нулю. Если взаимная энергия и взаимная средняя мощность двух сигналов $s_1(t)$ и $s_2(t)$ равны нулю, то сигналы $s_1(t)$ и $s_2(t)$ на интервале времени $T = t_2 - t_1$ ортогональны.

1.10. Энергетические характеристики комплексных сигналов

Относительно комплексных сигналов также оперируют понятиями мгновенной мощности, энергии и средней мощности. При этом эти величины должны быть действительными, несмотря на то, что сигналы комплексные. Рассмотрим это.

1. Мгновенная мощность комплексного сигнала определяется произведением комплексного сигнала $\dot{s}(t)$ на комплексно-сопряженный сигнал $\dot{s}^*(t)$

$$p(t) = \dot{s}\dot{s}^* = [s'(t) + js''(t)] \cdot [s'(t) - js''(t)] = [s'(t)]^2 + [s''(t)]^2, \quad (1.46)$$

где $s'(t)$ и $s''(t)$ — действительная и мнимая части комплексного сигнала соответственно.

2. Энергия комплексного сигнала $\dot{s}(t)$ на интервале времени $T = t_2 - t_1$ определяется выражением:

$$W = \int_{t_1}^{t_2} \dot{s}(t)\dot{s}^*(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ [s'(t)]^2 + [s''(t)]^2 \right\} dt. \quad (1.47)$$

3. Средняя мощность комплексного сигнала $\dot{s}(t)$ на интервале времени $T = t_2 - t_1$ имеет вид

$$P_{cp} = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} \dot{s}(t)\dot{s}^*(t)dt = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} \left\{ [s'(t)]^2 + [s''(t)]^2 \right\} dt. \quad (1.48)$$

Энергия и средняя мощность от суммы двух комплексных сигналов $\dot{s}_1(t)$ и $\dot{s}_2(t)$ на интервале времени $T = t_2 - t_1$ принимает вид

$$\begin{aligned} W &= \int_{t_1}^{t_2} [\dot{s}_1(t) + \dot{s}_2(t)] [\dot{s}_1^*(t) + \dot{s}_2^*(t)] dt = \int_{t_1}^{t_2} \dot{s}_1(t)\dot{s}_1^*(t)dt + \\ &+ \int_{t_1}^{t_2} \dot{s}_2(t)\dot{s}_2^*(t)dt + \int_{t_1}^{t_2} \dot{s}_1^*(t)\dot{s}_2(t)dt + \int_{t_1}^{t_2} \dot{s}_1(t)\dot{s}_2^*(t)dt = W_1 + W_2 + W_{12}, \\ P_{cp} &= \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} [\dot{s}_1(t) + \dot{s}_2(t)] [\dot{s}_1^*(t) + \dot{s}_2^*(t)] dt = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} \dot{s}_1(t)\dot{s}_1^*(t)dt + \\ &+ \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} \dot{s}_2(t)\dot{s}_2^*(t)dt + \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} \dot{s}_1^*(t)\dot{s}_2(t)dt + \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} \dot{s}_1(t)\dot{s}_2^*(t)dt = P_{cp1} + P_{cp2} + P_{cp12}. \end{aligned}$$

В данном выражении: $W_1 = \int_{t_1}^{t_2} \dot{s}_1(t)\dot{s}_1^*(t)dt$ — энергия первого сигнала; $W_2 = \int_{t_1}^{t_2} \dot{s}_2(t)\dot{s}_2^*(t)dt$ — энергия второго сигнала; $W_{12} = \int_{t_1}^{t_2} \dot{s}_1^*(t)\dot{s}_2(t)dt + \int_{t_1}^{t_2} \dot{s}_1(t)\dot{s}_2^*(t)dt$ —

взаимная энергия первого и второго сигналов; $P_{cp1} = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} \dot{s}_1(t) \dot{s}_1^*(t) dt$ – средняя мощность первого сигнала; $P_{cp2} = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} \dot{s}_2(t) \dot{s}_2^*(t) dt$ – средняя мощность второго сигнала; $P_{cp12} = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} \dot{s}_1^*(t) \dot{s}_2(t) dt + \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} \dot{s}_1(t) \dot{s}_2^*(t) dt$ – взаимная средняя мощность первого и второго сигналов.

Как относительно вещественных сигналов, так и относительно комплексных сигналов $\dot{s}_1(t)$ и $\dot{s}_2(t)$, рассматриваемых на интервале времени $T = t_2 - t_1$, выполняется условие ортогональности, если их взаимная средняя мощность P_{cp12} или взаимная энергия W_{12} равны нулю.

1.11. Ортогональные сигналы и обобщенные ряды Фурье

Энергия сигнала $s(t)$, выделяемая на сопротивлении 1 Ом, определяется интегралом от квадрата сигнала $s^2(t)$ (1.42) по всей оси времени

$$W_s = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt.$$

Используя это выражение, можно провести сравнение сигналов относительно энергии им соответствующей.

Допустим, что на вход некоторого устройства воздействуют два сигнала $s_1(t)$ и $s_2(t)$. Энергии этих сигналов имеют вид

$$W_{s_1} = \int_{-\infty}^{\infty} s_1^2(t) dt \text{ и } W_{s_2} = \int_{-\infty}^{\infty} s_2^2(t) dt. \text{ Энергия суммы двух сигналов определяется}$$

выражением (1.44). Из выражения (1.44) видно, что энергия суммы двух сигналов в общем виде не равна сумме энергий этих сигналов. Энергия суммарного сигнала включает в себя так называемую взаимную энергию

$$\text{сигналов } W_{12} = 2 \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) s_2(t) dt. \text{ При этом сигналы } s_1(t) \text{ и } s_2(t) \text{ называют}$$

ортгональными, если взаимная энергия от суммы двух сигналов равна нулю

$$W_{12} = 2 \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t)s_2(t)dt = 0.$$

Допустим, что на временном интервале $[t_1, t_2]$ задано множество сигналов $\{s_0, s_1, s_2, \dots\}$, попарно ортгональных друг другу и обладающих нулевой взаимной энергией. В этом случае условие ортгоналности сигналов имеет вид

$$W_{s_i s_j} = \int_{-\infty}^{\infty} s_i(t)s_j(t)dt = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j; \\ 0 & \text{при } i \neq j. \end{cases} \quad (1.49)$$

Равенство единице интеграла от квадрата сигнала говорит о том, что сигнал нормирован, а условие (1.49) определяет в пространстве сигналов **ортонормированный базис**, образованный сигналами s_i . В соответствии с этим базисом произвольный сигнал $s(t)$ может быть представлен рядом

$$s(t) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i s_i(t). \quad (1.50)$$

Ряд (1.50) называют **обобщенным рядом Фурье** сигнала $s(t)$ в выбранном базисе ортонормированных функций s_i .

Коэффициент c_i обобщенного ряда Фурье определяется выражением

$$c_i = \int_{t_1}^{t_2} s(t)u_i(t)dt \quad \text{при } k \geq 0, \quad (1.51)$$

где функция $u_i(t)$ – i -я функция из базиса ортонормированных функций.

Обобщенный ряд Фурье (1.50), с определенными по формуле (1.51) коэффициентами c_i , и множеством функций из выбранного базиса ортонормированных функций, можно использовать для аппроксимации любого сложного сигнала. В данном случае под аппроксимацией понимают разложение сложного сигнала на более простые функции (сигналы) из базиса ортонормированных функций, каждая из которых имеет амплитуду, определенную формулой (1.51).

Представление сигналов в виде обобщенных рядов Фурье имеет важное практическое значение. Вместо того чтобы изучать функциональную зависимость сложного сигнала в бесконечном

множестве точек, исследователь может характеризовать сигнал системой коэффициентов обобщенного ряда Фурье (1.51).

К числу ортонормированных базисов, наиболее применимых в радиотехнике, можно отнести следующие базисы.

Ортонормированная система гармонических функций. Допустим, что период изменения сложного сигнала равен T . Для данного случая в качестве ортонормированного базиса можно использовать постоянное число $u_0 = 1/\sqrt{T}$ и множество тригонометрических функций с частотами $2\pi m/T$, кратными частоте изменения исходного сигнала $\omega_1 = 2\pi/T$ (рис.1.16):

$$\begin{aligned} u_1 &= \sqrt{\frac{2}{T}} \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right); \quad u_2 = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right); \quad \dots; \\ u_{2m-1} &= \sqrt{\frac{2}{T}} \sin\left(\frac{2\pi m t}{T}\right); \quad u_{2m} = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos\left(\frac{2\pi m t}{T}\right). \end{aligned} \quad (1.52)$$

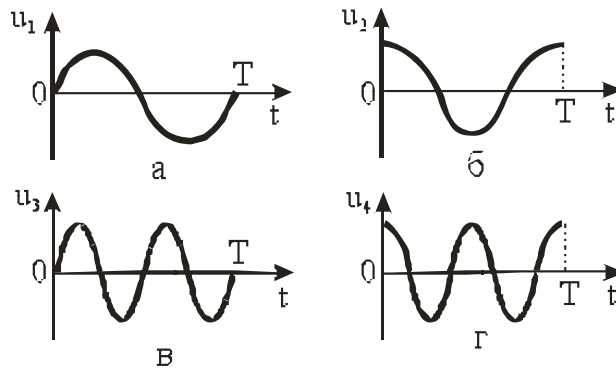


Рис.1.16. Базисные функции тригонометрического ряда Фурье: первая (а), вторая (б), третья (в) и четвертая (г) функции

Для проверки ортогональности функций (1.52) вычислим взаимную энергию для нескольких пар этих функций, например:

$$\begin{aligned} W_{u_0 u_1} &= \int_0^T \frac{1}{\sqrt{T}} \sqrt{\frac{2}{T}} \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) dt = -\frac{1}{\sqrt{T}} \sqrt{\frac{2}{T}} \frac{T}{2\pi} \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \Big|_0^T = \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2\pi} \cos(2\pi) + \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \cos(0) = 0; \\ W_{u_1 u_2} &= \int_0^T \sqrt{\frac{2}{T}} \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \sqrt{\frac{2}{T}} \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) dt = \frac{1}{2} \frac{2}{T} \int_0^T \sin\left(\frac{4\pi t}{T}\right) dt + \frac{1}{2} \frac{2}{T} \int_0^T \sin(0) dt = \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{T} \frac{T}{4\pi} \cos\left(\frac{4\pi t}{T}\right) \Big|_0^T + 0 = -\frac{1}{4\pi} \cos(4\pi) + \frac{1}{4\pi} \cos(0) = -\frac{1}{4\pi} + \frac{1}{4\pi} = 0;$$

$$\begin{aligned} W_{u_1 u_2} &= \int_0^T \sqrt{\frac{2}{T}} \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \sqrt{\frac{2}{T}} \sin\left(\frac{4\pi t}{T}\right) dt = \frac{1}{2} \frac{2}{T} \int_0^T \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) dt - \frac{1}{2} \frac{2}{T} \int_0^T \cos\left(\frac{6\pi t}{T}\right) dt = \\ &= \frac{1}{T} \frac{T}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \Big|_0^T - \frac{1}{T} \frac{T}{6\pi} \sin\left(\frac{6\pi t}{T}\right) \Big|_0^T = \frac{\sin(2\pi)}{2\pi} - \frac{\sin(0)}{2\pi} - \frac{\sin(6\pi)}{6\pi} + \frac{\sin(0)}{6\pi} = 0. \end{aligned}$$

Можно видеть, что взаимная энергия от пар этих функций равна нулю, что говорит об их ортогональности. Дальнейшие вычисления также будут приводить к равенству нулю взаимных энергий пар функций (1.52), что говорит об их ортогональности.

Ортонормированная система функций Уолша. Применительно к дискретным сигналам широко используют ортонормированную систему функций Уолша. Эти функции на отрезке своего существования $[-T/2, T/2]$ принимают лишь значения ± 1 . Для рассмотрения этих функций введем безразмерное время $v=t/T$. Обозначим k -ю функцию Уолша символом $wal(k, v)$. Описание функций Уолша аналитическими выражениями сложно. Однако построение системы функций Уолша можно проследить по рис.1.17, где приведены графики нулевой и первых трех функций Уолша.

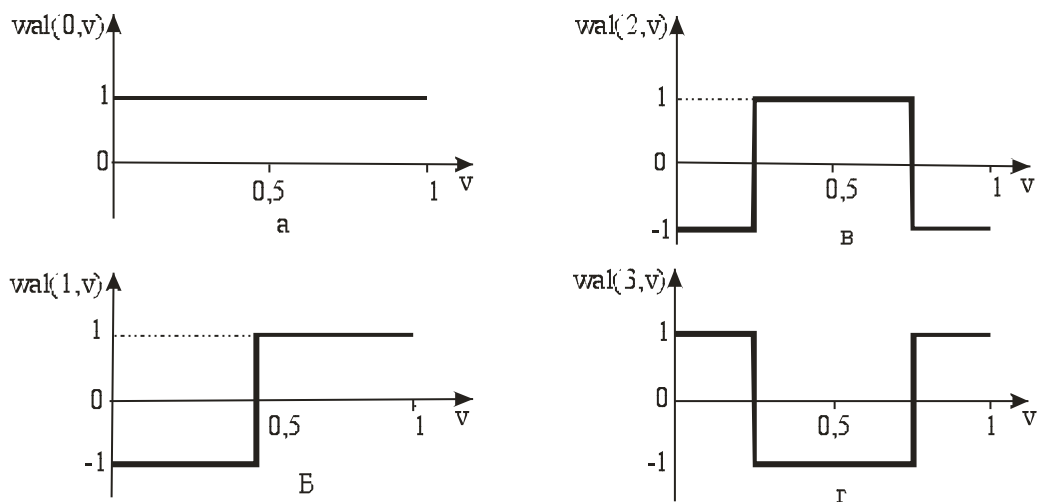


Рис.1.17. Графики нескольких первых функций Уолша

Ортогональность функций Уолша вытекает из принципа их построения и может быть проверена при вычислении взаимной энергии:

$$\int_{-t/2}^{t/2} \text{wal}(1, v) \text{wal}(2, v) dv = \int_{-T/2}^{T/2} (-1)^2 dv + \int_{-T/4}^0 (-1) dv + \int_0^{T/4} 1^2 dv + \int_{T/4}^{T/2} 1(-1) dv = 0.$$

В этом случае аппроксимация сложного сигнала, заданного на отрезке времени $[-T/2, T/2]$, в обобщенный ряд Фурье по функциям Уолша представляется в виде

$$s(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \text{wal}\left(k, \frac{t}{T}\right). \quad (1.53)$$

Базис экспоненциальных функций. Для записи обобщенного ряда Фурье (1.50) бывает удобно использовать комплексные функции в качестве базиса ортонормированных функций. Базис этих функций можно представить в виде

$$\dots \exp(-jk\omega_1 t), \dots, \exp(-j2\omega_1 t), \exp(-j\omega_1 t), 1, \exp(j\omega_1 t), \exp(j2\omega_1 t), \dots, \exp(jk\omega_1 t), \dots \quad (1.54)$$

Ортогональность этих функций (1.54) выполняется на временном интервале, равном периоду изменения $T = 2\pi / \omega_1$ исходного сигнала $s(t)$. Для проверки этого можно вычислить скалярное произведение относительно двух произвольных функций базиса, взяв, например, функции $\exp(-j2\omega_1 t)$ и $\exp(j3\omega_1 t)$:

$$\begin{aligned} \int_{-T/2}^{T/2} \exp(-j2\omega_1 t) \cdot \exp(j3\omega_1 t) dt &= \int_{-T/2}^{T/2} \exp(j\omega_1 t) dt = \\ &= \frac{1}{j\omega_1} \exp(j\omega_1 t) \Big|_{-T/2}^{T/2} = \frac{1}{j\omega_1} \left[\exp\left(j\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2}\right) - \exp\left(-j\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2}\right) \right] = \\ &= \frac{1}{j\omega_1} [\exp(j2\pi) - \exp(-j2\pi)] = \\ &= \cos(2\pi) + j\sin(2\pi) - \cos(2\pi) + j\sin(2\pi) = 0. \end{aligned}$$

Из последней строки выражения можно видеть, что скалярное произведение от функций $\exp(-j2\omega_1 t)$ и $\exp(j3\omega_1 t)$ равно нулю, поскольку нулю равны функции синус, а функции косинус взаимно вычитаются.

2. СПЕКТР ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИГНАЛОВ

2.1. Аппроксимация произвольных сигналов. Основные понятия

В теории радиотехнических сигналов детерминированные сигналы делят на периодические и непериодические. Периодические сигналы отвечают условию

$$s(t) = s(t + nT), \quad (2.1)$$

где n – любое целое число; T – период.

Таким образом, в соответствии с выражением (2.1), можно отметить, что мгновенные значения периодического сигнала повторяются через равные промежутки времени T , которые называют периодом.

Соответственно непериодические сигналы условию (2.1) не удовлетворяют.

К основным энергетическим характеристикам сигналов относят его мощность и энергию (1.37) – (1.41).

Анализ радиотехнических сигналов базируется на построении модели реальных детерминированных сигналов. Построение модели сигналов можно рассматривать как аппроксимацию сигналов во временной или частотной областях. При проведении спектрального анализа сигналов последние рассматривают в частотной области и соответственно аппроксимацию сигналов проводят в частотной области. В роли критерия, позволяющего оценить качество аппроксимации сигналов, используют разность средних мощностей или энергий реального сигнала и предлагаемой модели сигнала. Эта разность должна быть минимальной.

Пусть имеется произвольный сигнал $s(t)$, который необходимо аппроксимировать функцией $\eta(t)$ на интервале времени $[t_1, t_2]$. В этом случае можно записать равенство, говорящее о совпадении исходного сигнала и его модели

$$s(t) = c\eta(t), \quad (2.2)$$

где c – коэффициент, характеризующий степень несовпадения исходного сигнала $s(t)$ и аппроксимирующей функции $\eta(t)$.

Для оценки степени несовпадения исходного сигнала $s(t)$ и аппроксимирующей функции $c\eta(t)$ относительно их средних мощностей запишем выражение, определяющее функцию ошибки $\xi(t) = s(t) - c\eta(t)$. Тогда среднеквадратичное отклонение функции ошибки (средняя мощность сигнала ошибки) будет иметь вид

$$\sigma^2 = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \xi^2(t) dt = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} [s(t) - c\eta(t)]^2 dt.$$

Минимальное значение среднеквадратичного отклонения функции ошибки зависит от коэффициента c . Для нахождения значения коэффициента c , при котором среднеквадратичное отклонение минимально, возьмем первую производную по коэффициенту c от среднеквадратичного отклонения:

$$\frac{d\sigma^2}{dc} = -\frac{2}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} s(t)\eta(t) dt + \frac{2c}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \eta^2(t) dt = 0.$$

В соответствии с этим выражением найдем значение коэффициент c :

$$c = \int_{t_1}^{t_2} s(t)\eta(t) dt \bigg/ \int_{t_1}^{t_2} \eta^2(t) dt. \quad (2.3)$$

Можно видеть, что значение аппроксимирующего коэффициента c (2.3) определяется отношением взаимной энергии произвольного сигнала $s(t)$ и аппроксимирующей функции $\eta(t)$, к энергии аппроксимирующей функции $\eta(t)$. Тогда, с учетом выражений (2.2) и (2.3), исходный сигнал $s(t)$ может быть описан следующим выражением:

$$s(t) = \frac{\int_{t_1}^{t_2} s(t)\eta(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} \eta^2(t) dt} \eta(t).$$

В общем виде коэффициент c не равен нулю. В то же время в случае, когда сигналы полностью не подобны (сигналы $s(t)$ и $\eta(t)$

ортогональны на интервале $[t_1, t_2]$, то $\int_{t_1}^{t_2} s(t)\eta(t)dt = 0$, и коэффициент c будет равен нулю.

Пример 2.1. Аппроксимируем периодическую последовательность разнополярных прямоугольных импульсов амплитудой $\pm A$ (рис. 2.1) функцией $\eta(t) = \sin \omega t$. Период повторения сигнала и период аппроксимации равны T .

Решение. Для аппроксимации сигнала используем интервал времени $[0, T]$.

Определим значение коэффициента c по формуле (2.3)

$$c = \frac{\int_{t_1}^{t_2} s(t)\eta(t)dt}{\int_{t_1}^{t_2} \eta^2(t)dt} = \frac{A \int_0^{T/2} \sin(\omega t)dt - A \int_{T/2}^T \sin(\omega t)dt}{\int_0^T \sin^2(\omega t)dt} =$$

$$= 2 \frac{A \int_0^{T/2} \sin(\omega t)dt - A \int_{T/2}^T \sin(\omega t)dt}{\int_0^T dt - \int_0^T \cos(2\omega t)dt} = 2 \frac{-\frac{A \cos(\omega t)}{\omega} \Big|_0^{T/2} + \frac{A \cos(\omega t)}{\omega} \Big|_{T/2}^T}{T - \frac{\sin(2\omega t)}{2\omega} \Big|_0^T}.$$

Известно, что для периодических сигналов выполняется условие $\omega = 2\pi / T$. В соответствии с этим выражение сведем к виду

$$c = 2 \frac{-\frac{AT \cos \pi}{2\pi} + \frac{AT \cos 0}{2\pi} + \frac{AT \cos 2\pi}{2\pi} - \frac{AT \cos \pi}{2\pi}}{T - \frac{T \sin 4\pi}{4\pi}} = \frac{4A}{\pi}.$$

С учетом значения коэффициента c сигнал $s(t)$ описывается формулой (рис.2.1):

$$s(t) = c\eta(t) = \frac{4A}{\pi} \sin(\omega t).$$

Степень совпадения сигнала $s(t)$ и аппроксимирующей функции $c\eta(t)$ определяется значением коэффициента $c = 4A / \pi$, являющегося амплитудой функции $\sin(\omega t)$. В соответствии с примером 2.1 можно видеть, что исходный сигнал и аппроксимирующая функция совпадают

между собой относительно энергии им соответствующей. Однако по форме исходный сигнал и аппроксимирующая функция не совпадают.

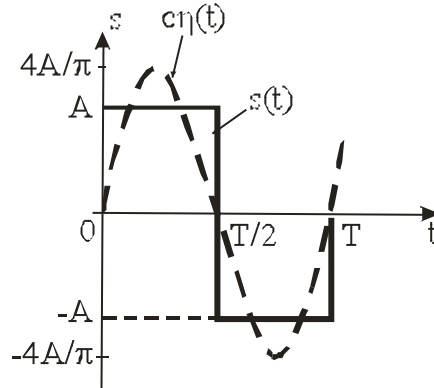


Рис.2.1. Исходный сигнал $s(t)$ и аппроксимирующая функция $c\eta(t)$ в примере 2.1

Как правило, можно проводить аппроксимацию сложных сигналов с использованием одной аппроксимирующей функции. Однако в этом случае получить высокую точность относительно формы исходного сигнала невозможно (см. рис.2.1). В то же время можно использовать множество аппроксимирующих функций $\eta_0(t), \eta_1(t), \eta_2(t), \dots, \eta_k(t), \dots$, где k – номер аппроксимирующей функции. Каждая из аппроксимирующих функций будет вносить свой вклад в точность аппроксимации исходного сигнала. В этом случае модель исходного сигнала будет иметь вид

$$s(t) = c_0\eta_0(t) + c_1\eta_1(t) + c_2\eta_2(t) + \dots + c_n\eta_n(t) + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} c_k\eta_k(t), \quad (2.4)$$

где $\eta_0(t), \eta_1(t), \eta_2(t), \dots, \eta_k(t), \dots$ – базис аппроксимирующих функций, а $c_0, c_1, c_2, \dots, c_k, \dots$ – коэффициенты аппроксимации.

Полученное выражение (2.4) называют обобщенным рядом Фурье.

В данном случае точность аппроксимации исходного сигнала $s(t)$ множеством аппроксимирующих функций $\eta_0(t), \eta_1(t), \eta_2(t), \dots$ определяется тем, чтобы разность энергий исходного сигнала

$$W_s = \int_{t_1}^{t_2} s^2(t) dt$$

и аппроксимирующих функций

$$W_{\eta} = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{k=0}^{\infty} c_k^2 \eta_k^2(t) dt = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^2 \left[\int_{t_1}^{t_2} \eta_k^2(t) dt \right]$$

была равна нулю. Если это условие выполняется, то тогда значения коэффициентов c_k , $k \geq 0$ могут быть рассчитаны по формуле

$$c_k = \int_{t_1}^{t_2} s(t) \eta_k(t) dt \bigg/ \int_{t_1}^{t_2} \eta_k^2(t) dt. \quad (2.5)$$

Доказано, что если коэффициенты аппроксимирующей функции определяются в соответствии с выражением (2.5), то сложный периодический сигнал может быть описан обобщенным рядом Фурье (2.4).

В выражении (2.4) в качестве аппроксимирующих функций $\{\eta_k, k \geq 0\}$ используют ортонормированные функции, которые попарно отвечают условию ортогональности

$$\begin{cases} \int_a^b \eta_n(t) \eta_m(t) dt = 0 & \text{при } n \neq m; \\ \int_a^b \eta_n(t) \eta_m(t) dt \neq 0 & \text{при } n = m. \end{cases} \quad (2.6)$$

Если для функции $\eta_n(t)$ выполняется условие

$$\int_a^b \eta_n^2(t) dt = 1, \quad (2.7)$$

то подобная функция называется нормированной. Функции, отвечающие условиям (2.6) и (2.7), называют ортонормированными, а множество подобных функций называют базисом ортонормированных функций. Соответственно базис ортонормированных функций и используется в качестве системы действительных функций при аппроксимации сложного периодического сигнала обобщенным рядом Фурье (2.4).

В качестве аппроксимирующих функций можно использовать базис ортонормированных, принимающих комплексные значения $\{\tilde{\eta}_k(t), k \geq 0\}$. В этом случае условие ортогональности и нормировки имеет вид

$$\int_a^b \tilde{\eta}_n(t) \tilde{\eta}_m^*(t) dt = 0 \quad \text{при } n \neq m;$$

$$\int_a^b \tilde{\eta}_n(t) \tilde{\eta}_n^*(t) dt = \int_a^b |\tilde{\eta}_n(t)|^2 dt,$$

где $\tilde{\eta}^*(t)$ – функция комплексно–сопряженная к комплексной функции $\tilde{\eta}(t)$; $|\tilde{\eta}(t)|$ – модуль комплексной функции $\tilde{\eta}(t)$.

Комплексные коэффициенты обобщенного ряда Фурье можно определить в соответствии с выражением

$$\tilde{c}_k = \int_a^b \tilde{s}(t) \tilde{\eta}_k^*(t) dt \bigg/ \int_a^b |\tilde{\eta}_k(t)|^2 dt, \quad (2.8)$$

а сам обобщенный ряд Фурье имеет вид

$$\tilde{s}(t) = \tilde{c}_0 \tilde{\eta}_0(t) + \tilde{c}_1 \tilde{\eta}_1(t) + \tilde{c}_2 \tilde{\eta}_2(t) + \dots + \tilde{c}_n \tilde{\eta}_n(t) + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{c}_k \tilde{\eta}_k(t). \quad (2.9)$$

Системы ортонормированных функций, которые можно использовать при аппроксимации сложных сигналов обобщенным рядом Фурье, могут быть различными. Использование той или иной системы функций определяется теми целями, которые преследуются при аппроксимации. К числу этих целей можно отнести следующее:

- наиболее точное представление формы периодического сигнала в его модели;
- получение минимального числа членов обобщенного ряда Фурье при заданной точности аппроксимации.

Наиболее часто при аппроксимации сложных сигналов используют ортонормированную систему гармонических функций $\sin(m\omega t)$ и $\cos(n\omega t)$, что определяется следующим:

- гармоническое колебание является простейшей функцией и не подвержено разложению на другие спектральные составляющие;
- гармонические колебания являются единственными функциями времени, которые при прохождении через линейные радиотехнические цепи не изменяют своей формы, у этих функций изменяется лишь амплитуда и начальная фаза колебания;
- использование гармонических колебаний в качестве аппроксимирующих функций позволяет применять символьные

методы анализа линейных радиотехнических цепей в установившемся режиме (например, метод комплексных амплитуд).

Для аппроксимации периодических сигналов можно использовать системы ортонормированных функций типа полиномов (многочленов) Чебышева, Эрмита, Лагера или Лежандра.

Однако, использование этих полиномов, как правило, не дает высокой точности аппроксимации при умеренном числе членов обобщенного ряда Фурье. Например, среднеквадратическая ошибка σ^2 аппроксимации периодической последовательности прямоугольных импульсов, представляющих собой разнополярную функцию

$$s(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } -1 \leq t \leq 0; \\ -1 & \text{при } 0 \leq t \leq 1, \end{cases}$$

полиномом Лежандра с четырьмя членами ряда равна 28 %. Использование же базиса тригонометрических функций при том же числе членов ряда обеспечивает ошибку аппроксимации 6,75 %. Следует отметить, что использование тригонометрических функций в качестве базиса ортонормированных функций обеспечивает в 4 раза более точный результат при одинаковом числе членов ряда Фурье, чем аппроксимация сигнала полиномом Лежандра.

2.2. Спектральное представление периодических сигналов

Рассмотрим аппроксимацию сложных периодических сигналов, отвечающих условию (2.1). Один из вариантов подобного сигнала приведен на рис. 2.2.

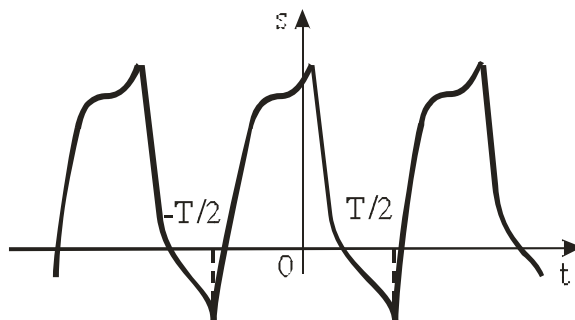


Рис. 2.2. Пример периодического сигнала сложной формы

Аппроксимируем этот сигнал обобщенным рядом Фурье (2.4). В качестве базиса функций ортогональных на отрезке времени $[-T/2, T/2]$ используем гармонические функции:

$$\eta_0(t) = 1; \eta_{1s}(t) = \sin(\omega_1 t); \eta_{1c}(t) = \cos(\omega_1 t);$$

$$\eta_{2s}(t) = \sin(2\omega_1 t); \eta_{2c}(t) = \cos(2\omega_1 t); \dots$$

Эти функции отвечают условию периодичности. Круговая частота $\omega_1 = 2\pi/T$ определяется периодом T изменения исходного сигнала, подлежащего аппроксимации.

Для аппроксимации сигнала обобщенным рядом Фурье (2.4) вычислим коэффициенты c_k по формуле (2.5). В ходе вычислений учтем, что каждый коэффициент c_k определяется суммой двух гармонических функций $\eta_{kc} + \eta_{ks} = \cos(k\omega_1 t) + \sin(k\omega_1 t)$ с одинаковыми круговыми частотами $k\omega_1$. Тогда значение коэффициента c_k принимает вид

$$c_k = \frac{\int_{-T/2}^{T/2} s(t)\eta_k(t)dt}{\int_{-T/2}^{T/2} \eta_k^2(t)dt} = \frac{\int_{-T/2}^{T/2} s(t)[\cos(k\omega_1 t) + \sin(k\omega_1 t)]dt}{\int_{-T/2}^{T/2} [\sin(k\omega_1 t) + \cos(k\omega_1 t)]^2 dt} =$$

$$= \frac{\int_{-T/2}^{T/2} s(t)[\cos(k\omega_1 t) + \sin(k\omega_1 t)]dt}{\int_{-T/2}^{T/2} [\sin^2(k\omega_1 t) + \cos^2(k\omega_1 t) + 2\sin(k\omega_1 t)\cos(k\omega_1 t)]dt}.$$

В знаменателе полученного выражения имеем $\sin^2(k\omega_1 t) + \cos^2(k\omega_1 t) = 1$. Интеграл от произведения функций синус и косинус равен нулю. В этом случае значение коэффициента c_k равно

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t)\cos(k\omega_1 t)dt + \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t)\sin(k\omega_1 t)dt = c_{kc} + c_{ks}, \quad (2.10)$$

где $c_{kc} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t)\cos(k\omega_1 t)dt$, $c_{ks} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t)\sin(k\omega_1 t)dt$ —

косинусоидальная и синусоидальная составляющие коэффициентов c_k соответственно.

Имея значения коэффициентов c_{kc} и c_{ks} и базис ортогональных функций $\eta_0(t) = 1$; $\eta_{1s}(t) = \sin(\omega_1 t)$; $\eta_{1c}(t) = \cos(\omega_1 t)$; $\eta_{2s}(t) = \sin(2\omega_1 t)$; $\eta_{2c}(t) = \cos(2\omega_1 t)$; ... сложный периодический можно описать обобщенным рядом Фурье (2.4)

$$s(t) = \sum_{k=0}^{\infty} [c_{kc} \cos(k\omega_1 t) + c_{ks} \sin(k\omega_1 t)].$$

Преобразуя тригонометрические функции в соответствии с правилами, оговоренными в математике, выражение можно представить в более наглядной форме:

$$s(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos(k\omega_1 t - \Theta_k), \quad (2.11)$$

где $A_k = \sqrt{(c_{kc})^2 + (c_{ks})^2}$ – амплитуда, а $\Theta_k = \arctg \frac{c_{ks}}{c_{kc}}$ – начальная фаза гармонической функции с круговой частотой $k\omega_1$.

Пример 2.2. Имеется периодический сигнал $s(t)$, представленный на рис. 2.3

$$s(t) = \begin{cases} -A & \text{при } -T/2 < t \leq 0; \\ A & \text{при } 0 < t \leq T/2. \end{cases}$$

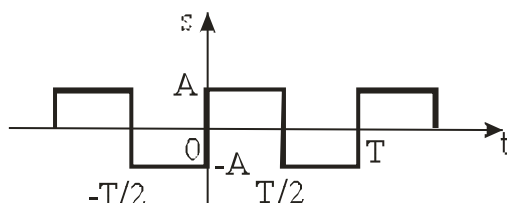


Рис. 2.3. Периодический сигнал к примеру 2.2

Необходимо аппроксимировать этот сигнал обобщенным рядом Фурье, используя тригонометрический базис аппроксимирующих функций.

Решение. Исходный сигнал является периодической функцией, изменяющейся с периодом T . В связи с этим будем аппроксимировать сигнал во временном диапазоне $[-T/2, T/2]$.

Для аппроксимации сигнала $s(t)$ вычислим значения коэффициентов c_k , используя выражение (2.10).

В соответствии с этим выражением вычислим косинусные и синусные составляющие коэффициентов c_k

$$\begin{aligned}
 c_{kc} &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \cos(k\omega_1 t) dt = \frac{1}{T} \left[\int_{-T/2}^0 (-A) \cos(k\omega_1 t) dt + \int_0^{T/2} A \cos(k\omega_1 t) dt \right] = \\
 &= -\frac{A}{Tk\omega_1} \sin(k\omega_1 t) \Big|_{-T/2}^0 + \frac{A}{Tk\omega_1} \sin(k\omega_1 t) \Big|_0^{T/2} = \\
 &= \frac{A}{Tk\omega_1} [-\sin(0) - \sin(k\omega_1 T/2) + \sin(k\omega_1 T/2) - \sin(0)] = 0; \\
 c_{ks} &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \sin(k\omega_1 t) dt = \frac{1}{T} \left[\int_{-T/2}^0 (-A) \sin(k\omega_1 t) dt + \int_0^{T/2} A \sin(k\omega_1 t) dt \right] = \\
 &= \frac{A}{Tk\omega_1} \cos(k\omega_1 t) \Big|_{-T/2}^0 - \frac{A}{Tk\omega_1} \cos(k\omega_1 t) \Big|_0^{T/2} = \\
 &= \frac{A}{Tk\omega_1} [1 - \cos(k\omega_1 T/2) - \cos(k\omega_1 T/2) + 1] = \frac{A}{k\pi} [1 - \cos(k\pi)].
 \end{aligned}$$

В соответствии с полученными значениями коэффициентов c_{kc} и c_{ks} найдем значения амплитуд A_k и начальной фазы Θ_k гармонических составляющих ряда Фурье (2.11):

$$\begin{aligned}
 A_k &= \sqrt{(c_{kc})^2 + (c_{ks})^2} = \frac{A}{k\pi} (1 - \cos k\pi); \\
 \Theta_k &= \arctg \frac{c_{ks}}{c_{kc}} = \arctg \frac{\frac{A}{k\pi} (1 - \cos k\pi)}{0} = \frac{\pi}{2}.
 \end{aligned}$$

Тогда модель исходного сигнала (рис. 2.3), будет описываться следующим обобщенным рядом Фурье (2.11):

$$s(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos(k\omega_1 t - \Theta_k) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{A}{k\pi} (1 - \cos k\pi) \cos\left(k\omega_1 t - \frac{\pi}{2}\right) \right].$$

Первые пять слагаемых этого ряда Фурье будут иметь вид:

$$\begin{aligned}
 k=0 \quad c_0 \eta_0(t) &= 0; \\
 k=1 \quad c_1 \eta_1(t) &= (2A/\pi) \sin(\omega_1 t); \\
 k=2 \quad c_2 \eta_2(t) &= 0; \\
 k=3 \quad c_3 \eta_3(t) &= (2A/3\pi) \sin(3\omega_1 t); \\
 k=4 \quad c_4 \eta_4(t) &= 0;
 \end{aligned}$$

$$k = 5 \quad c_5 \eta_5(t) = (2A / 5\pi) \sin(5\omega_1 t).$$

Проведенные вычисления показывают, что исходный сигнал (рис. 2.3) аппроксимируется бесконечной суммой спектральных составляющих. Каждая спектральная составляющая ряда изменяется с частотой, кратной частоте $\omega_1 = 2\pi / T$ исходного сигнала. При этом четные спектральные составляющие ряда равны нулю, поскольку нулю равны их амплитуды, а ряд соответственно описывается множеством нечетных спектральных составляющих ($k = 1, 3, 5, \dots$)

$$s(t) = \frac{2A}{\pi} \left(\sin \omega_1 t + \frac{1}{3} \sin 3\omega_1 t + \frac{1}{5} \sin 5\omega_1 t + \dots \right).$$

Ряд Фурье (2.4) может быть записан в комплексной форме с использованием базиса ортонормированных комплексных функций

$$\begin{aligned} & \dots \exp(-jk\omega_1 t), \dots, \exp(-j2\omega_1 t), \exp(-j\omega_1 t), 1, \exp(j\omega_1 t), \\ & \exp(j2\omega_1 t), \dots, \exp(jk\omega_1 t), \dots, \end{aligned} \quad (2.12)$$

ортogonalность которых выполняется на временном интервале, равном периоду изменения $T = 2\pi / \omega_1$ исходного сигнала $s(t)$.

Ряд Фурье в комплексной форме в соответствии с системой ортонормированных функций (2.12) имеет вид:

$$\begin{aligned} \tilde{s}(t) &= \dots \tilde{c}_{-k} \exp(-jk\omega_1 t) + \dots + \tilde{c}_{-2} \exp(-j2\omega_1 t) + \tilde{c}_{-1} \exp(-j\omega_1 t) + \\ &+ \tilde{c}_0 + \tilde{c}_1 \exp(j\omega_1 t) + \tilde{c}_2 \exp(j2\omega_1 t) + \dots + \tilde{c}_k \exp(jk\omega_1 t) + \dots = \quad (2.13) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{c}_k \exp(jk\omega_1 t). \end{aligned}$$

Комплексные коэффициенты \tilde{c}_k ряда Фурье (2.13) найдем, используя выражения (2.8) и (2.9). В соответствии с (2.8) определим взаимную энергию двух комплексно-сопряженных функций (попарно используем функции с коэффициентами $-k$ и k) из базиса ортонормированных функций (2.12)

$$\int_{-T/2}^{T/2} |\tilde{\eta}_k(t)|^2 dt = \int_{-T/2}^{T/2} [\exp(-jk\omega_1 t) + \exp(jk\omega_1 t)] dt = T.$$

Используя формулу (2.9), находим значения коэффициентов \tilde{c}_k ряда Фурье

$$\tilde{c}_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \exp(-jk\omega_1 t) dt.$$

В соответствии с преобразованием Эйлера $\exp(-jk\omega_1 t) = \cos k\omega_1 t - j \sin k\omega_1 t$, коэффициенты c_k ряда Фурье в комплексной форме можно выразить через гармонические функции

$$\tilde{c}_k = c_{kc} - jc_{ks}, \quad (2.14)$$

где $c_{kc} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \cos(k\omega_1 t) dt$ и $c_{ks} = -\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \sin(k\omega_1 t) dt$ –

косинусоидальная и синусоидальная составляющие коэффициентов \tilde{c}_k .

Тогда, используя представление коэффициентов \tilde{c}_k в тригонометрической форме, найдем амплитуду (модуль)

$|\tilde{c}_k| = \sqrt{(c_{kc})^2 + (c_{ks})^2}$ и аргумент (начальная фаза) $\Theta_k = -\arctg(c_{ks} / c_{kc})$ этих коэффициентов. В результате этого запишем значения коэффициентов \tilde{c}_k в показательной форме

$$\tilde{c}_k = |\tilde{c}_k| \exp(j\Theta_k),$$

где $|\tilde{c}_k|$ – модуль, а Θ_k – аргумент коэффициента \tilde{c}_k .

В этом случае ряд Фурье в комплексной форме принимает вид

$$\tilde{s}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\tilde{c}_k| \exp[j(k\omega_1 t - \Theta_k)]. \quad (2.15)$$

В полученном выражении, модули $|\tilde{c}_k|$ коэффициентов \tilde{c}_k соответствующие отрицательным $|\tilde{c}_{-k}|$ и положительным $|\tilde{c}_k|$ индексам k , равны между собой, а аргументы Θ_{-k} и Θ_k симметричны относительно начала координат ($k\omega_1 t = 0$ при $k = 0$). В соответствии с этим слагаемые в ряде Фурье (2.15) можно разбить на две группы. Одна группа будет соответствовать отрицательным $-k$, а вторая – положительным k . В этом случае можно производить суммирование в ряде Фурье (2.15) не от $-\infty$, а от нуля. Это позволяет записать ряд Фурье в следующем виде:

$$\tilde{s}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} |\tilde{c}_k| \left\{ \exp[-j(k\omega_1 t - \Theta_k)] + \exp[j(k\omega_1 t - \Theta_k)] \right\}.$$

Тогда, применяя преобразование Эйлера $\exp(\pm jk\omega_1 t) = \cos k\omega_1 t \pm j \sin k\omega_1 t$ к выражениям в квадратных скобках, запишем комплексный ряд Фурье с использованием удвоенной функции косинуса $2\cos(k\omega_1 t - \Theta_k)$

$$s(t) = 2 \sum_{k=0}^{\infty} |\tilde{c}_k| \cos(k\omega_1 t - \Theta_k). \quad (2.16)$$

Рассматривая выражение (2.16), можно отметить, что при $k=0$ в базисе ортонормированных функций (2.12) имеется только одна функция, равная единице. С учетом этого ряд Фурье (2.16) можно представить в более удобной форме:

$$s(t) = \tilde{c}_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} |\tilde{c}_k| \cos(k\omega_1 t - \Theta_k).$$

Используя значения коэффициентов c_{kc} и c_{ks} (2.14), сведем полученный тригонометрический ряд Фурье к более удобному к применению виду

$$\begin{aligned} s(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega_1 t) - j b_k \sin(k\omega_1 t)] = \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_1 t + \Theta_k), \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\text{где } A_k = 2|\tilde{c}_k| = \sqrt{(a_k)^2 + (b_k)^2}; \quad a_k = 2c_{kc} = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \cos(k\omega_1 t) dt;$$

$$b_k = 2c_{ks} = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \sin(k\omega_1 t) dt; \quad \Theta_k = -\arctg \frac{b_k}{a_k}.$$

Проводя анализ тригонометрического ряда Фурье (2.17) и коэффициентов, входящих в него, можно отметить следующее:

– если исходный периодический сигнал описывается четной функцией (сигнал симметричен относительно начала координат $s(-t) = s(t)$ и достигает максимального значения при $t=0$), то в ряде Фурье коэффициенты b_k равны нулю;

– если исходный периодический сигнал описывается нечетной функцией (сигнал не симметричен относительно начала координат и при

$t=0$ достигает минимального значения), то в ряде Фурье коэффициенты a_k равны нулю;

– состав и параметры частотного спектра исходного сигнала $s(t)$ полностью определяется спектром амплитуд (модули коэффициентов \tilde{c}_k или A_k) и спектром фаз (аргументы Θ_k комплексных коэффициентов);

– спектр амплитуд исходного периодического сигнала $s(t)$ представляет собой дискретную (линейчатую) последовательность; он состоит из множества спектральных составляющих, каждая из которых имеет свою частоту $0, \omega_1, \omega_2 = 2\omega_1, \omega_3 = 3\omega_1, \dots$ и свою амплитуду; для примера на рис. 2.4 представлен спектр амплитуд $|\tilde{c}_k|$ для коэффициентов \tilde{c}_k , а на рис. 2.5 – для коэффициентов $A_k = 2|\tilde{c}_k|$, соответствующих одному и тому же сигналу;

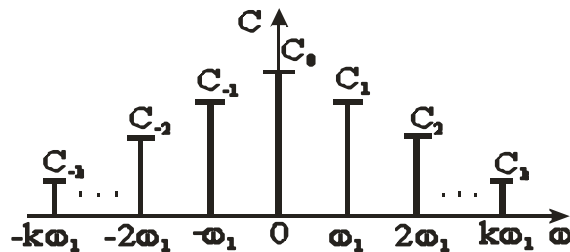


Рис. 2.4. Спектральный состав комплексного ряда Фурье

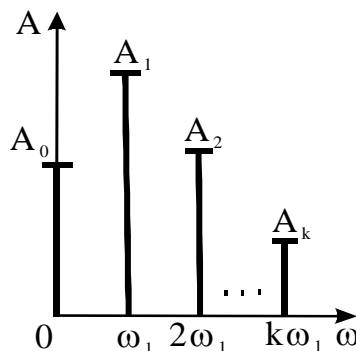


Рис. 2.5. Спектральный состав тригонометрического ряда Фурье

Пример 2.3. Периодический сигнал, рассмотренный в примере 2.2 и представляющий собой последовательность разнополярных импульсов амплитудой $A(-A)$ и периодом следования T , необходимо аппроксимировать, используя тригонометрический ряд Фурье.

Решение. При решении задачи учтем то обстоятельство, что исходный сигнал представляет собой нечетную функцию, поэтому для его

аппроксимации вычислим коэффициенты $a_0/2$, b_k и аргумент Θ_k ряда Фурье (2.17).

Проводим расчет коэффициента $a_0/2$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^0 (-A) dt + \frac{1}{T} \int_0^{T/2} A dt = -\frac{A}{2} + \frac{A}{2} = 0.$$

Рассчитываем коэффициент b_k

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \sin(k\omega_1 t) dt = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^0 (-A) \sin(k\omega_1 t) dt + \frac{2}{T} \int_0^{T/2} A \sin(k\omega_1 t) dt = \\ &= \frac{2A}{k\pi} [1 - \cos(k\pi)] = \frac{4A}{k\pi} \sin^2\left(\frac{k\pi}{2}\right) = \frac{4A}{k\pi} [1 - (-1)^k]. \end{aligned}$$

Сигнал в рассматриваемом примере представляет собой нечетную функцию, поэтому коэффициенты a_k ряда Фурье будут равны нулю. В связи с этим аргумент Θ_k ряда Фурье будет иметь вид

$$\Theta_k = -\arctg\left(\frac{b_k}{a_k}\right) = -\arctg\left(\frac{b_k}{0}\right) = -\arctg(\infty) = -\pi/2.$$

В соответствии с рассчитанными коэффициентами $a_0/2$, b_k и аргумента Θ_k ряд Фурье, описывающий периодический сигнал, представляющий собой последовательность разнополярных прямоугольных импульсов, будет иметь вид

$$\begin{aligned} s(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2A}{k\pi} [1 - \cos(k\pi)] \cos\left(k\omega_1 t - \frac{\pi}{2}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2A}{k\pi} [1 - \cos(k\pi)] \sin(k\omega_1 t) = \\ &= \frac{4A}{k\pi} \left[\sin(\omega_1 t) + \frac{1}{3} \sin(3\omega_1 t) + \frac{1}{5} \sin(5\omega_1 t) + \dots \right]. \end{aligned}$$

Ряды Фурье, полученные в примерах 2.2 и 2.3, по форме совпадают между собой. Соответственно можно сделать вывод, что для вычисления спектров периодических сигналов можно использовать как ряд (2.15), так и ряд (2.17).

Примем, что амплитуды импульсов в примерах 2.2 и 2.3 равны $A(-A) = 1 (-1)$. В соответствии с этим на рис. 2.6 представлен амплитудный спектр A_k периодической последовательности разнополярных импульсов (рис. 2.3), полученный в соответствии с выражением (2.17), а на рис. 2.7

показан спектр $|\tilde{c}_k| = A_k / 2$ комплексного ряда Фурье (2.15) для этого же сигнала.

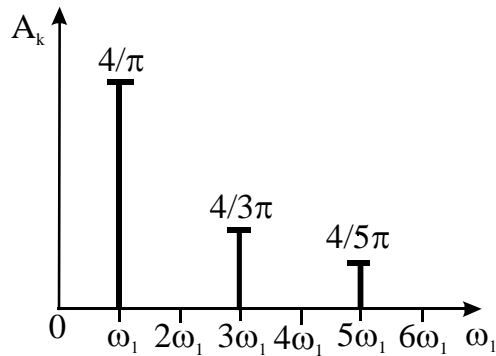


Рис. 2.6. Амплитудный спектр периодической последовательности разнополярных импульсов, полученный в соответствии с выражением (2.17)

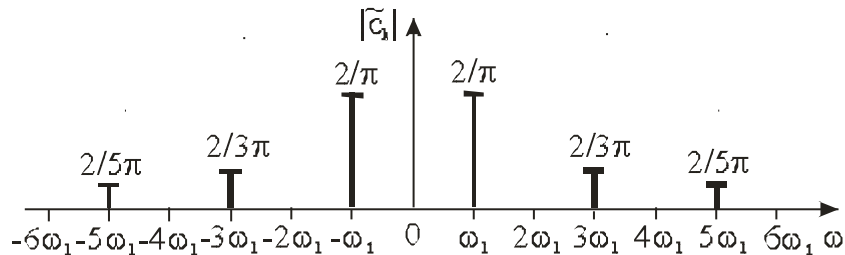


Рис. 2.7. Значения коэффициентов комплексного ряда Фурье (2.15) для периодической последовательности разнополярных импульсов

Для наглядности на рис. 2.8 показано суммирование различных спектральных составляющих ряда Фурье, полученного в примере 2.3.

Рассматривая рис. 2.8, можно отметить следующее. Аппроксимация сложных сигналов рядом Фурье позволяет разложить эти сигналы на множество более простых сигналов, изменяющихся по гармоническому закону с частотами, кратными частоте ω_1 повторения исходного сигнала. Сумма множества простых аппроксимирующих гармонических сигналов дает описание исходного периодического сигнала.

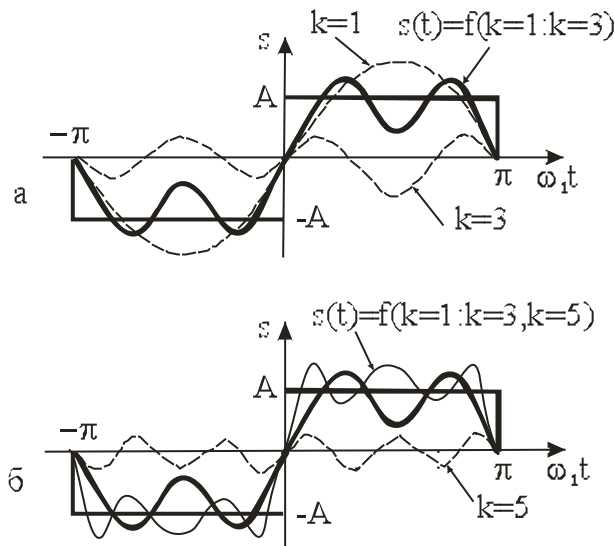


Рис. 2.8. Суммирование 1–й и 3–й гармоник (а), 1–й, 3–й и 5–й гармоник (б) ряда Фурье, полученного в примере 2.3

2.3. Анализ прохождения периодических сигналов через линейные цепи

Аппроксимация сложных периодических сигналов в частотной области позволяет разложить эти сигналы на спектральные составляющие. Это позволяет проводить анализ искажения спектра сигнала при прохождении его через линейные цепи. Подобный метод называют методом спектрального анализа. Рассмотрим этот метод и его применение.

Допустим, что имеется некоторая линейная электрическая цепь. На вход этой цепи воздействует сложный периодический сигнал. В ходе решения задачи необходимо найти сигнал на выходе цепи.

Последовательность действий выглядит следующим образом.

1. Сложный периодический сигнал аппроксимируется рядом Фурье, например, в тригонометрической форме

$$u_{\text{вх}}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_1 t + \Theta_k).$$

Для записи ряда Фурье вычисляют амплитуды A_k и аргументы Θ_k спектральных составляющих.

2. В соответствии с топологией, видом и параметрами элементов линейной электрической цепи определяют комплексный коэффициент

передачи линейной цепи, например, комплексную частотную характеристику коэффициента передачи напряжения

$$K(j\omega) = K(\omega)\exp(j\varphi),$$

где $K(\omega) = |K(j\omega)|$ – модуль коэффициента передачи (амплитудно-частотная характеристика), а $\varphi(\omega)$ – аргумент коэффициента передачи (фазочастотная характеристика) линейной цепи.

3. Функция $\cos(x)$ связана с экспоненциальной функцией следующим соотношением $\cos(x) = [\exp(jx) + \exp(-jx)] / 2$. С учетом этого запишем мгновенный комплекс для k -й спектральной составляющей входного сигнала, описываемого рядом Фурье

$$\tilde{u}_{\text{вх}_k}(t) = A_k(k\omega_1)\exp\{j[k\omega_1 t + \Theta_k(k\omega_1)]\},$$

где $A(k\omega_1)$ и $\Theta(k\omega_1)$ – амплитуда и аргумент k -й спектральной составляющей на частоте $k\omega_1$.

4. Используя мгновенный комплекс входного сигнала и комплексную частотную характеристику линейной цепи, запишем мгновенный комплекс отклика сигнала на выходе линейной цепи относительно k -й спектральной составляющей входного сигнала

$$\begin{aligned}\tilde{u}_{\text{вых}_k}(t) &= \tilde{u}_{\text{вх}_k}(t)K(j\omega) = \\ &= A_k(k\omega_1)\exp\{j[k\omega_1 t + \Theta_k(k\omega_1)]\} K(k\omega_1)\exp[j\varphi(k\omega_1)] = \\ &= A_k(k\omega_1)K(k\omega_1)\exp\{j[k\omega_1 t + \Theta_k(k\omega_1) + \varphi(k\omega_1)]\},\end{aligned}$$

где $K(k\omega_1)$ и $\varphi(k\omega_1)$ – модуль и аргумент комплексной частотной характеристики линейной цепи на частоте $k\omega_1$.

5. Используя данные п.4, записываем мгновенный комплекс отклика на выходе линейной цепи

$$\tilde{u}_{\text{вых}}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(k\omega_1)K(k\omega_1)\exp\{j[k\omega_1 t + \Theta_k(k\omega_1) + \varphi(k\omega_1)]\}.$$

6. Осуществляем обратный переход от экспоненциальной функции $\exp(x)$ к функции $\cos(x)$ и определяем спектральный состав сигнала на выходе линейной цепи:

$$\begin{aligned}
u_{\text{ВЫХ}}(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} u_{\text{ВЫХ}_k}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(k\omega_1) K(k\omega_1) \cos[k\omega_1 t + \Theta_k(k\omega_1) + \varphi(k\omega_1)] = \\
&= \frac{a_0}{2} K(0) + A_1(\omega_1) K(\omega_1) \cos[\omega_1 t + \Theta_k(\omega_1) + \varphi(\omega_1)] + \\
&\quad + A_2(2\omega_1) K(2\omega_1) \cos[2\omega_1 t + \Theta_k(2\omega_1) + \varphi(2\omega_1)] + \dots
\end{aligned}$$

Метод спектрального анализа широко используют при стремлении оценить искажения спектра периодического сигнала, при его прохождении через линейную электрическую цепь. Метод нагляден в применении. Однако он имеет существенный недостаток. Этот недостаток заключается в том, что исходные сигналы могут иметь сложную форму, что потребует большого числа членов ряда Фурье при стремлении получить приемлемую точность анализа. Это приводит к объемным математическим вычислениям.

Пример 2.4. Используя результаты аппроксимации последовательности прямоугольных разнополярных импульсов рядом Фурье из примера 2.3, в качестве входного сигнала и линейную цепь, представленную на рис. 2.9, необходимо найти отклик на выходе линейной цепи (зажимы 2–2), используя спектральный метод анализа. Зажимы 1–1 являются входными.

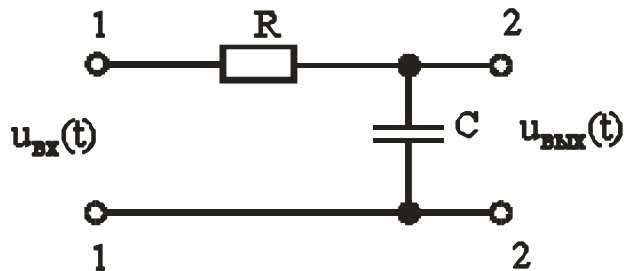


Рис. 2.9. Линейная электрическая цепь

Решение. Сигнал на входе линейной цепи может быть представлен рядом (см. разложение в примере 2.3)

$$s(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2A}{k\pi} [1 - \cos(k\pi)] \cos\left(k\omega_1 t - \frac{\pi}{2}\right).$$

Комплексная частотная характеристика коэффициента передачи напряжения линейной цепи от зажимов 1–1 к зажимам 2–2 описывается в следующем виде:

$$K_{21}(j\omega) = \frac{1/(j\omega C)}{R + 1/(j\omega C)} = \frac{1}{1 + j\omega\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} \exp[-j \arctg(\omega\tau)],$$

где $\tau = RC$ – постоянная времени цепи.

Для k – й спектральной составляющей входного сигнала мгновенный комплекс будет иметь вид

$$\tilde{u}_{\text{вх}_k}(t) = \frac{2A}{k\pi} [1 - \cos(k\pi)] \exp \left\{ j \left[k\omega_1 t - \left(\frac{\pi}{2} \right) \right] \right\}.$$

В соответствии со значениями мгновенного комплекса для k – й спектральной составляющей входного сигнала и комплексной частотной характеристикой линейной цепи, мгновенный комплекс отклика для k – й спектральной составляющей представится в виде

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{\text{вых}_k}(t) &= \tilde{u}_{\text{вх}_k}(t) K(j\omega) = \\ &= \frac{2A}{k\pi} [1 - \cos(k\pi)] \exp \left[j \left(k\omega_1 t - \frac{\pi}{2} \right) \right] \frac{1}{\sqrt{1 + (k\omega_1\tau)^2}} \exp[-j \arctg(k\omega_1\tau)] = \\ &= \frac{2A}{k\pi \sqrt{1 + (k\omega_1\tau)^2}} [1 - \cos(k\pi)] \exp \left\{ j \left[k\omega_1 t - \frac{\pi}{2} - \arctg(k\omega_1\tau) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Проводя суммирование мгновенных комплексов спектральных составляющих откликов на выходе линейной цепи, получим полный мгновенный комплекс отклика на выходе линейной цепи

$$\tilde{u}_{\text{вых}}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2A}{k\pi \sqrt{1 + (k\omega_1\tau)^2}} [1 - \cos(k\pi)] \exp \left\{ j \left[k\omega_1 t - \frac{\pi}{2} - \arctg(k\omega_1\tau) \right] \right\}.$$

Переходя от мгновенного комплекса отклика к отклику, изменяющемуся по гармоническому закону, получим следующее значение отклика на выходе линейной цепи:

$$\begin{aligned} u_{\text{вых}}(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2A}{k\pi \sqrt{1 + (k\omega_1\tau)^2}} [1 - \cos(k\pi)] \cos \left[k\omega_1 t - \frac{\pi}{2} - \arctg(k\omega_1\tau) \right] = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2A}{k\pi \sqrt{1 + (k\omega_1\tau)^2}} [1 - \cos(k\pi)] \sin [k\omega_1 t - \arctg(k\omega_1\tau)]. \end{aligned}$$

В соответствии с полученным выражением, описывающем отклик на выходе линейной цепи, рассчитаем амплитуды нескольких спектральных

составляющих отклика. Для наглядности придадим значения некоторым величинам: $A = 1\text{ В}$, $R = 1\text{ кОм}$, $C = 1000\text{ пФ}$, $\omega_1 = 10^5\text{ рад/с}$, $\omega_1\tau = \omega_1 RC = 0,1$.

Проведенные расчеты дали следующий результат:

$$\text{при } k=1 \quad u_{\text{вых}}(t) = \frac{2 [1 - \cos(\pi)]}{\pi \sqrt{1 + (0,1)^2}} = \frac{4}{1,005\pi} = 1,21\text{ В},$$

$$\text{при } k=3 \quad u_{\text{вых}}(t) = \frac{2 [1 - \cos(3\pi)]}{3\pi \sqrt{1 + (0,3)^2}} = \frac{4}{3,132\pi} = 0,407\text{ В},$$

$$\text{при } k=5 \quad u_{\text{вых}}(t) = \frac{2 [1 - \cos(5\pi)]}{5\pi \sqrt{1 + (0,5)^2}} = \frac{4}{5,6\pi} = 0,227\text{ В}.$$

Рассматривая полученные результаты, можно отметить следующее. При прохождении сигнала сложной формы через линейную цепь, рассмотренную в примере 2.4, амплитуды спектральных составляющих сигнала уменьшаются. Так амплитуда первой гармоники уменьшилась на 0,5 %, третьей гармоники – на 4 %, а пятой гармоники – на 12 %. Амплитуда каждой последующей гармоники выходного сигнала снижаются пропорционально $1/\sqrt{1 + (k\omega_1 RC)^2}$. Кроме того, аргумент каждой спектральной составляющей выходного сигнала изменяется на величину $-\arctg(k\omega_1 RC)$. Все это приводит к появлению линейных искажений сигнала, изменяются амплитуды и аргументы спектральных составляющих. Но при этом новые спектральные составляющие не возникают, соответственно, при прохождении сигналов через линейные цепи спектральный состав сигналов не изменяется.

2.4. Зависимость спектра периодической последовательности импульсов от длительности импульса

Рассмотрим периодическую последовательность прямоугольных импульсов $s(t)$ (рис. 2.10). Амплитуда каждого импульса равна A , длительность каждого импульса последовательности равна $\tau_{\text{и}}$, а период

следования импульсов – T . Соответственно скважность этой последовательности будет равна $q = T / \tau_n$.

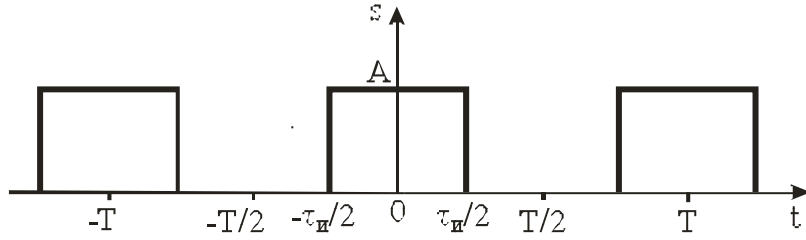


Рис. 2.10. Периодическая последовательность прямоугольных импульсов

Вычислим спектральный состав этой последовательности импульсов. Для этого используем выражение (2.17). Пусть, рассматриваемая последовательность импульсов, будет четной функцией. Тогда коэффициенты b_k и аргументы Θ_k ряда Фурье будут равны нулю. Соответственно для проведения аппроксимации периодической последовательности импульсов необходимо вычислить коэффициенты $a_0 / 2$ и a_k .

Коэффициент $a_0 / 2$ будет иметь вид

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) dt = \frac{A}{T} \int_{-\tau_n/2}^{\tau_n/2} dt = A \frac{\tau_n}{T} = \frac{A}{q}.$$

Коэффициент a_k для k -й гармоники спектра равен:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \cos(k\omega_1 t) dt = \frac{2}{T} \int_{-\tau_n/2}^{\tau_n/2} A \cos(k\omega_1 t) dt = \\ &= \frac{2A}{k\pi} \sin \frac{k\pi\tau_n}{T} = \frac{2A}{k\pi} \sin \frac{k\pi}{q}. \end{aligned}$$

В соответствии с коэффициентами $a_0 / 2$ и a_k ряд Фурье, аппроксимирующий последовательность прямоугольных импульсов (рис.2.10), принимает вид

$$\begin{aligned} s(t) &= A \left(\frac{\tau_n}{T} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin \frac{k\omega_1 \tau_n}{2} \cos(k\omega_1 t) \right) = \\ &= A \left(\frac{1}{q} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin \frac{k\pi}{q} \cos(k\omega_1 t) \right). \end{aligned}$$

Из выражения можно видеть, что модуль k -го коэффициента a_k равен:

$$|a_k| = A_k = \frac{2A}{k\pi} \left| \sin \left(k\pi \frac{\tau_{\text{и}}}{T} \right) \right| = \frac{2A}{k\pi} \left| \sin \left(\frac{k\pi}{q} \right) \right|.$$

В этом выражении, аргумент функции $\sin(k\pi\tau_{\text{и}}/T)$ умножим и разделим на $\tau_{\text{и}}$.

$$|a_k| = A_k = \frac{2A}{k\pi} \left| \sin \left(k \frac{\pi}{\tau_{\text{и}}} \frac{\tau_{\text{и}}}{T} \tau_{\text{и}} \right) \right| = \frac{2A}{k\pi} \left| \sin \left(k \frac{2\pi}{\tau_{\text{и}}} \frac{\tau_{\text{и}}}{2q} \right) \right|. \quad (2.18)$$

Это не изменит сути выражения, однако, позволит получить выражение, которое обеспечивает проведение анализа спектра сигнала (рис. 2.11) периодической последовательности импульсов.

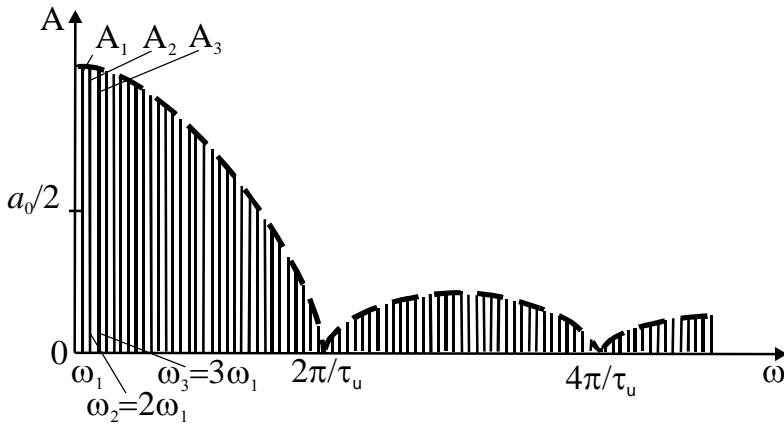


Рис. 2.11. Спектр периодической последовательности импульсов

Выражение (2.18) позволяет сделать следующие выводы относительно спектра периодической последовательности импульсов.

1. Функция $\sin(k\pi\tau_{\text{и}}/T)$ будет равна нулю на частотах $\omega = k2\pi/\tau_{\text{и}}$.

2. Минимальная частота спектра периодической последовательности (частота следования импульсов в последовательности) равна $\omega_1 = 2\pi/T$. Это говорит о том, что число спектральных составляющих в диапазонах частот $0 < \omega \leq 2\pi/\tau_{\text{и}}$, $2\pi/\tau_{\text{и}} < \omega \leq 4\pi/\tau_{\text{и}}$ и т.д. равно $(\omega/\omega_1) = (kT/\tau_{\text{и}}) = kq$. Таким образом, число спектральных составляющих в спектре периодической последовательности импульсов растет с увеличением скважности $q = T/\tau_{\text{и}}$ следования импульсов или же

с уменьшением длительности τ_n импульсов. Частотный интервал между спектральными составляющими уменьшается, а амплитуды спектральных составляющих медленно убывают.

3. Из математики известно, что при малых k функция $\sin(k\pi\tau_n/T)$ принимает вид $\sin(k\pi\tau_n/T) \approx k\pi\tau_n/T$. В этом случае амплитуды спектральных составляющих представляются в виде

$$A_k \approx \frac{2A}{k\pi} k\pi \frac{\tau_n}{T} = \frac{2A}{q}.$$

Из выражения можно видеть, что при малых k амплитуды спектральных составляющих периодической последовательности импульсов обратно пропорциональны скважности следования импульсов, т.е. амплитуды спектральных составляющих уменьшаются.

4. Спектр периодической последовательности импульсов (рис. 2.11) состоит из бесконечного множества «лепестков», расположенных в диапазонах частот $0 < \omega \leq 2\pi/\tau_n$, $2\pi/\tau_n < \omega \leq 4\pi/\tau_n$, ..., $(n-2)\pi/\tau_n < \omega \leq n\pi/\tau_n$, ..., и имеющих свои спектральные составляющие. С учетом этого, выражение (2.19) можно свести к виду

$$A_k = \frac{2A}{\pi n l} \left| \sin \left(n l \frac{2\pi \tau_n}{\tau_n 2q} \right) \right|,$$

где $n = 1, 2, 3, \dots$ – номер спектральной составляющей в «лепестке» спектра; $l = 1, 2, 3, \dots$ – номер «лепестка» спектра.

На границах частотных диапазонов «лепестков» спектра амплитуды спектральных составляющих равны нулю. При выполнении равенства

$\left| \sin \left(n l \frac{2\pi \tau_n}{\tau_n 2q} \right) \right| = 1$ амплитуды спектральных составляющих имеют

максимальное значение $A_{l_{\max}} = 2A / (\pi n l)$. Это возможно при $n l \frac{2\pi \tau}{\tau 2q} = \frac{l\pi}{2}$,

т.е. при $n = q/2$. Максимальная амплитуда $A_{l_{\max}} = 4A / (\pi q l)$ спектральных составляющих в «лепестке» спектра уменьшается пропорционально как номеру «лепестка», так и скважности следования импульсов.

5. Протяженность частотных диапазонов каждого «лепестка» спектра имеет вид

$$\Pi_1 = \frac{2\pi(1+1)}{\tau_{\text{и}}} - \frac{2\pi 1}{\tau_{\text{и}}} = \frac{2\pi}{\tau_{\text{и}}}.$$

Поскольку $\tau_{\text{и}} = T/q$, то частотный диапазон «лепестка» спектра равен $\Pi_1 = \omega_1 q$, т.е. зависит от скважности следования импульсов. С ростом скважности q следования импульсов ширина спектра растет пропорционально скважности.

2.5. Мощность спектра периодического сигнала

Рассмотрим сигнал $s(t)$, который описывается аналитическим выражением и представляет собой сложную периодическую функцию. Среднюю мощность для подобных сигналов описывается в следующем виде:

$$P_{\text{cp}} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s^2(t) dt,$$

где T – период изменения сигнала.

Рассмотрим теперь распределение мощности в спектре сигнала $s(t)$. Эта мощность должна быть равна средней за период мощности исходного сложного сигнала, описываемого аналитическим выражением.

Сигнал $s(t)$ можно аппроксимировать обобщенным рядом Фурье в комплексной форме (2.15). В этом случае каждая из спектральных составляющих имеет свою амплитуду $|\tilde{c}_k|$, а базисные функции η_k принадлежат ортонормированному базису. Тогда средняя мощность периодического сигнала с учетом его спектрального состава и значений коэффициентов \tilde{c}_k может быть рассчитана по формуле

$$P_{\text{cp}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\tilde{c}_k|^2 \left[\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \exp(jk\omega_1 t) \exp(-jk\omega_1 t) dt \right].$$

В этом выражении интеграл в квадратных скобках будет равен периоду T изменения исходного сигнала $s(t)$. С учетом этого значение

средней мощности сигнала, исходя из его спектрального состава, сводится к виду

$$P_{cp} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\tilde{c}_k|^2.$$

Из полученного выражения можно видеть, что средняя мощность периодического сигнала определяется суммой квадратов амплитуд спектральных составляющих, на которые разлагается этот сигнал при его аппроксимации.

При использовании в качестве ортонормированного базиса функций, изменяющихся по гармоническому закону и, соответственно, при аппроксимации сложного сигнала рядом Фурье в тригонометрической форме, средняя мощность этого сигнала может быть определена в виде

$$\begin{aligned} P_{cp} &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left[\sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos(k\omega_1 t + \Theta_k) \right]^2 dt = \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{\infty} A_k^2 \left[\int_{-T/2}^{T/2} \frac{1}{2} dt + \int_{-T/2}^{T/2} \frac{1}{2} \cos(2k\omega_1 t + 2\Theta_k) dt \right] = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} A_k^2 + \frac{1}{2T} \sum_{k=0}^{\infty} A_k^2 \int_{-T/2}^{T/2} \cos(2k\omega_1 t + 2\Theta_k) dt. \end{aligned}$$

В этом выражении интеграл во втором слагаемом будет равен нулю. В соответствии с этим выражение, описывающее среднюю мощность периодического сигнала, принимает вид

$$P_{cp} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_k^2}{2} = \left(\frac{a_0}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} A_k^2.$$

Можно видеть, что средняя мощность сложного периодического сигнала, исходя из его спектрального состава, может быть описана суммой квадратов амплитуд спектральных составляющих, на которые разлагается сложный сигнал, деленной пополам.

2.6. Спектральное представление непериодических сигналов

Детерминированные сигналы могут быть как периодическими, отвечающими условию (2.1), так и непериодическими. Относительно периодических сигналов в п. 2.2 получены выражения (2.15) и (2.17), позволяющие аппроксимировать подобный сигнал рядом Фурье. Но при этом в радиотехнике применительно к различным радиотехническим устройствам рассматривается множество сигналов, представляющих собой непериодические функции. С учетом этого распространим выражения, относящиеся к ряду Фурье на непериодические сигналы.

Рассмотрим непериодический сигнал $s(t)$, представленный в виде одиночного импульса (рис. 2.12). Этот сигнал отличен от нуля на временном интервале $[t_1, t_2]$.

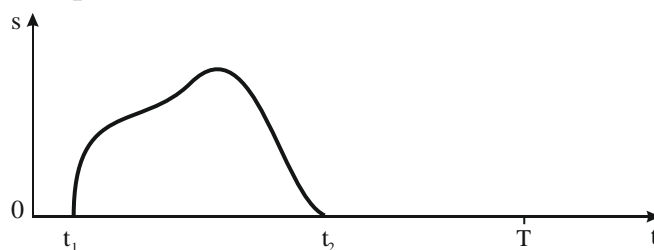


Рис. 2.12. Одиночный импульс

Определим для этого импульса интервал времени $(0, T)$, на котором он существует. Это позволяет представить одиночный импульс в виде периодической последовательности импульсов с периодом повторения T (рис. 2.13). Для анализа используем периодический сигнал, который описывается рядом Фурье в комплексной форме (2.15):

$$\tilde{s}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\tilde{c}_k| \exp(jk\omega_1 t), \quad (2.19)$$

где $\omega_1 = 2\pi/T$ – круговая частота повторения импульсов периодического сигнала.

Коэффициенты ряда Фурье в комплексной форме могут быть рассчитаны по формуле

$$\tilde{c}_k = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} \tilde{s}(t) \exp(-jk\omega_1 t) dt. \quad (2.20)$$

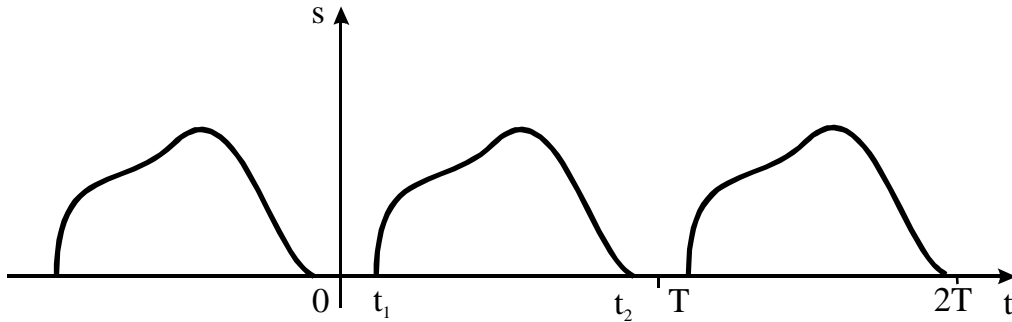


Рис. 2.13. Приведение одиночного импульса к периодическому сигналу

Подставляя (2.20) в (2.19), получим

$$\tilde{s}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} \left(\int_{t_1}^{t_2} \tilde{s}(t) \exp(-jk\omega_1 t) dt \right) \exp(jk\omega_1 t). \quad (2.21)$$

Разложение в ряд Фурье сигнала, представляющего собой периодическую функцию, приводит к получению дискретного спектра. Каждому коэффициенту \tilde{c}_k ряда Фурье соответствует своя круговая частота $k\omega_1$, а составляющие спектра сигнала отстоят друг от друга на величину ω_1 .

В ряде Фурье (2.21), описывающем периодический сигнал, период T устремить к бесконечности. Это позволяет вернуться к рассмотрению одиночного импульса, т. е. непериодического сигнала (рис. 2.12). В этом случае круговая частота $\omega_1 = 2\pi/T$ будет стремиться к бесконечно малой величине $d\omega$. Частоты спектральных составляющих $k\omega_1$ будут представлять собой текущие частоты ω , поскольку

$$\lim_{T \rightarrow \infty} k\omega_1 = \lim_{T \rightarrow \infty} k \frac{2\pi}{T} = k d\omega = \omega.$$

Это позволяет заменить в выражении (2.21) операцию суммирования относительно бесконечно малых величин операцией интегрирования. В результате этого будем иметь

$$\begin{aligned}
 s(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\omega_1}{2\pi} \left[\int_{t_1}^{t_2} s(t) \exp(-jk\omega_1 t) dt \right] \exp(jk\omega_1 t) = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(j\omega t) \left[\int_{t_1}^{t_2} s(t) \exp(-j\omega t) dt \right] d\omega.
 \end{aligned}
 \tag{2.22}$$

В этом выражении интеграл в квадратных скобках является функцией частоты ω и называется спектральной плотностью сигнала $s(t)$

$$S(j\omega) = \int_{t_1}^{t_2} s(t) \exp(-j\omega t) dt.$$

Следует отметить, что, когда интервал интегрирования неопределен, спектральная плотность сигнала рассматривается в диапазоне частот от $-\infty$ до $+\infty$

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \exp(-j\omega t) dt. \tag{2.23}$$

Подставляя (2.23) в выражение (2.22), получим описание сигнала $s(t)$ в соответствии со спектральной плотностью, ему соответствующей в следующем виде:

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) \exp(j\omega t) d\omega. \tag{2.25}$$

Выражение (2.23) называется интегралом прямого, а (2.24) – интегралом обратного преобразования Фурье. Выражение (2.23) позволяет провести анализ непериодических сигналов в частотной области, а выражение (2.25) – во временной области, т. е. восстановить сигнал по его спектральной плотности.

Спектральная плотность сигнала (2.23) в общем виде является комплексной величиной. Однако характеристики реальных физических процессов представляют собой действительные величины. С учетом этого сведем выражение (2.23) к показательной форме. Для этого экспоненциальную функцию в выражении (2.23) представим в виде суммы функций $\cos(\omega t)$ и $\sin(\omega t)$:

$$\begin{aligned}
 S(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cos(\omega t) dt - j \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \sin(\omega t) dt = \\
 &= A(\omega) - jB(\omega) = S(\omega) \exp(j\psi(\omega)),
 \end{aligned}
 \tag{2.25}$$

где $A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cos \omega t dt$ и $B(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \sin \omega t dt$ – действительная и мнимая части спектральной плотности сигнала; $S(\omega) = \sqrt{A^2(\omega) + B^2(\omega)}$ и $\psi(\omega) = -\arctg \frac{B(\omega)}{A(\omega)}$ – модуль и аргумент спектральной плотности непериодического сигнала.

Пример 2.5. Имеется одиночный прямоугольный импульс (рис. 2.14) длительностью $\tau_{\text{и}}$ и амплитудой A . Необходимо вычислить спектральную плотность этого сигнала.

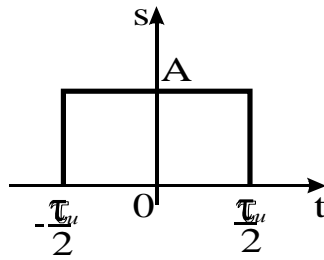


Рис. 2.14. Одиночный прямоугольный импульс

Решение. Для вычисления спектральной плотности одиночного импульса воспользуемся выражением (2.23):

$$\begin{aligned}
 S(j\omega) &= \int_{-\tau_{\text{и}}/2}^{\tau_{\text{и}}/2} A \exp(-j\omega t) dt = \\
 &= A \int_{-\tau_{\text{и}}/2}^{\tau_{\text{и}}/2} \cos(\omega t) dt - jA \int_{-\tau_{\text{и}}/2}^{\tau_{\text{и}}/2} \sin(\omega t) dt = A\tau_{\text{и}} \frac{\sin\left(\omega \frac{\tau_{\text{и}}}{2}\right)}{\omega \frac{\tau_{\text{и}}}{2}}.
 \end{aligned}
 \tag{2.26}$$

Из выражения (2.26) можно видеть, что модуль спектральной плотности для прямоугольного импульса определяется действительной частью спектральной плотности

$$S(\omega) = A\tau_{\text{и}} \frac{\sin(\omega\tau_{\text{и}}/2)}{\omega\tau_{\text{и}}/2}. \quad (2.27)$$

При $\omega=0$ модуль спектральной плотности $S(\omega)$ достигает максимального значения. В выражении (2.27) при $\omega\tau_{\text{и}}/2 = k\pi$ функция синус равна нулю, что выполняется на частотах $\omega = 2k\pi/\tau_{\text{и}}$. В этом случае модуль спектральной плотности $S(\omega)$ прямоугольного импульса также будет равен нулю (рис. 2.15).

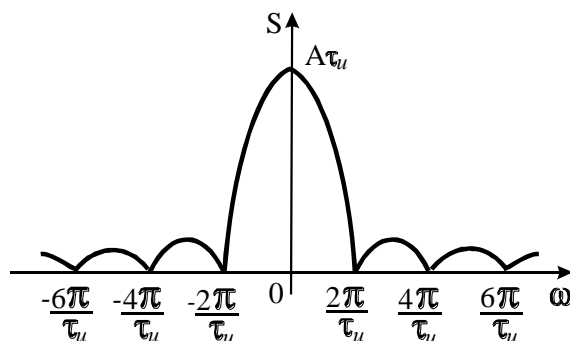


Рис. 2.15. Модуль спектральной плотности прямоугольного импульса

Аргумент (2.25) спектральной плотности прямоугольного импульса представляется в виде

$$\psi(\omega) = -\operatorname{arctg} \frac{B(\omega)}{A(\omega)} = -\operatorname{arctg} \left[\frac{0}{A\tau_{\text{и}} \frac{\sin(\omega\tau_{\text{и}}/2)}{\omega\tau_{\text{и}}/2}} \right].$$

Мнимая часть спектральной плотности прямоугольного импульса равна нулю. С учетом этого аргумент спектральной плотности прямоугольного импульса в различных диапазонах частот принимает следующие значения (рис. 2.16).

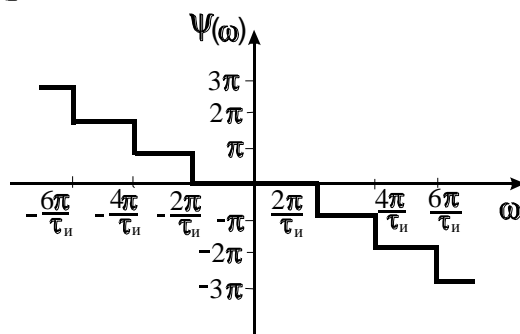


Рис. 2.16. Зависимость аргумента спектральной плотности
прямоугольного импульса

В диапазоне частот $-2\pi/\tau_{\text{и}} \leq \omega \leq 2\pi/\tau_{\text{и}}$ аргумент равен нулю. В диапазонах частот $-4\pi/\tau_{\text{и}} \leq \omega \leq -2\pi/\tau_{\text{и}}$ и $2\pi/\tau_{\text{и}} \leq \omega \leq 4\pi/\tau_{\text{и}}$ аргумент равен π и $-\pi$ соответственно. В диапазонах частот $-6\pi/\tau_{\text{и}} \leq \omega \leq -4\pi/\tau_{\text{и}}$ и $4\pi/\tau_{\text{и}} \leq \omega \leq 6\pi/\tau_{\text{и}}$ аргумент равен 2π и -2π соответственно и т.д.

Рассматривая спектральную плотность прямоугольного импульса (2.26), можно отметить следующее:

- увеличение длительности импульса приводит к тому, что модуль спектральной плотности при частоте $\omega = 0$ увеличивается;
- при увеличении длительности импульса значение частоты, на которой модуль спектральной плотности обращается в нуль, уменьшается;
- при увеличении длительности импульса ширина спектра прямоугольного импульса сужается.

Пример 2.6. Имеется треугольный импульс (рис. 2.17). Форма этого импульса описывается выражением

$$s(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < -\tau_{\text{и}}/2; \\ A\left(\frac{2t}{\tau_{\text{и}}} + 1\right) & \text{при } -\tau_{\text{и}}/2 \leq t \leq 0; \\ A\left(1 - \frac{2t}{\tau_{\text{и}}}\right) & \text{при } 0 < t \leq \tau_{\text{и}}/2; \\ 0 & \text{при } t > \tau_{\text{и}}/2. \end{cases}.$$

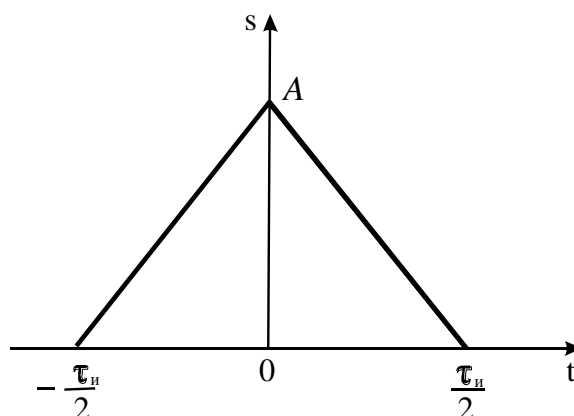


Рис. 2.17. Треугольный импульс

Необходимо определить спектральную плотность этого сигнала.

Решение. Для вычисления спектральной плотности треугольного импульса используем выражение (2.23). В это выражение введем аналитическое описание треугольного импульса, в результате чего найдем

$$\begin{aligned}
 S(j\omega) &= A \int_{-\tau_n/2}^0 \left(\frac{2t}{\tau_n} + 1 \right) \exp(-j\omega t) dt + A \int_0^{\tau_n/2} \left(1 - \frac{2t}{\tau_n} \right) \exp(-j\omega t) dt = \\
 &= \frac{2A}{\tau_n} \int_{-\tau_n/2}^0 t \exp(-j\omega t) dt + A \int_{-\tau_n/2}^0 \exp(-j\omega t) dt + A \int_0^{\tau_n/2} \exp(-j\omega t) dt - \\
 &\quad - \frac{2A}{\tau_n} \int_0^{\tau_n/2} t \exp(-j\omega t) dt = \frac{A\tau_n}{2} \frac{\sin^2(\omega\tau_n/4)}{\omega^2\tau_n^2/16}.
 \end{aligned} \quad (2.28)$$

В полученном выражении, множитель $A\tau_n/2$ определяет площадь треугольного импульса (рис. 2.17). Второй множитель в выражении равен нулю тогда, когда нулю равна функция $\sin(\omega\tau_n/4) = 0$. Функция синус равна нулю, при выполнении условий $\omega\tau_n/4 = \pm\pi, \pm2\pi, \dots, \pm k\pi, \pm \dots$. Тогда частоты, на которых модуль спектральной плотности равен нулю, имеют вид: $\omega = \pm 4\pi/\tau_n, \pm 8\pi/\tau_n, \dots, \pm 4k\pi/\tau_n$, где $k = 1, 2, \dots$ (рис. 2.18).

Решив примеры 2.5 и 2.6, можно сделать следующие сравнительные выводы относительно спектральной плотности сигналов, имеющих различную форму:

- максимальное значение модуля спектральной плотности треугольного импульса (2.28) в два раза меньше максимального значения модуля спектральной плотности прямоугольного импульса (2.27);

- ширина спектра треугольного импульса в два раза больше ширины спектра прямоугольного импульса при одинаковой длительности импульсов;

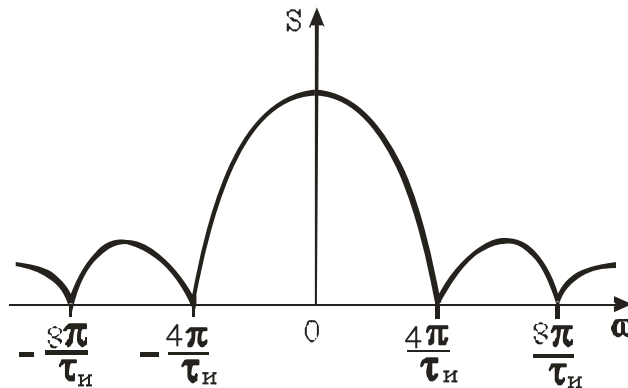


Рис. 2.18. Спектральная плотность треугольного импульса

– модуль спектральной плотности боковых лепестков спектра треугольного импульса убывает пропорционально $1/\omega^2$, т.е. модуль спектральной плотности боковых лепестков треугольного импульса снижается существенно быстрее, чем модуль спектральной плотности прямоугольного импульса.

2.7. Прохождение непериодических сигналов через линейные цепи

Анализ прохождения непериодических сигналов через линейные цепи базируется на использовании спектральной плотности исходного сигнала (2.23):

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \exp(-j\omega t) dt,$$

и интеграла обратного преобразования Фурье, который позволяет определить сигнал по его спектральной плотности (2.24):

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) \exp(j\omega t) d\omega.$$

Преобразование непериодических сигналов, проходящих через линейные цепи, можно рассмотреть в соответствии со следующими рассуждениями.

Комплексная частотная $K(j\omega)$ и импульсная $h(t)$ характеристики линейной цепи связаны между собой прямым преобразованием Фурье (2.23):

$$K(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \exp(-j\omega t) dt.$$

Спектральную плотность сигнала на входе линейной цепи можно также найти, используя интеграл прямого преобразования Фурье (2.23):

$$S_{\text{вх}}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u_{\text{вх}}(t) \exp(-j\omega t) dt.$$

Пусть оператор, определяющий характер преобразования сигнала линейной цепью, задан в виде интеграла Дюамеля

$$u_{\text{ВЫХ}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u_{\text{ВХ}}(\tau)h(t - \tau)d\tau.$$

Учитывая выше сказанное, спектральную плотность сигнала на выходе линейной цепи можно записать в виде

$$S_{\text{ВЫХ}}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u_{\text{ВЫХ}}(t)\exp(-j\omega t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u_{\text{ВХ}}(\tau)h(t - \tau)\exp(-j\omega t)dtd\tau.$$

В этом выражении величину $t - \tau$ выразим через z : $z = t - \tau$. В результате получим

$$S_{\text{ВЫХ}}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u_{\text{ВХ}}(\tau)\exp(-j\omega\tau)d\tau \int_{-\infty}^{\infty} h(z)\exp(-j\omega z)dz.$$

В этом выражении первый интеграл отражает спектральную плотность входного сигнала $S_{\text{ВХ}}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u_{\text{ВХ}}(\tau)\exp(-j\omega\tau)d\tau$, а второй интеграл – комплексную частотную характеристику цепи, связанную прямым преобразованием Фурье с импульсной характеристикой этой же

цепи $K(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(z)\exp(-j\omega z)dz.$

Окончательно можно записать

$$S_{\text{ВЫХ}}(j\omega) = S_{\text{ВХ}}(j\omega)K(j\omega).$$

В соответствии с полученным выражением можно сделать вывод, что спектральная плотность сигнала на выходе линейной цепи определяется произведением спектральной плотности сигнала на входе цепи и комплексной частотной характеристики этой цепи.

Сигнал на выходе линейной цепи можно найти в соответствии с его спектральной плотностью, используя интеграл обратного преобразования Фурье

$$u_{\text{ВЫХ}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\text{ВЫХ}}(j\omega)\exp(j\omega t)d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\text{ВХ}}(j\omega)K(j\omega)\exp(j\omega t)d\omega.$$

2.8. Соотношение между спектрами одиночного импульса и периодической последовательности импульсов

Зададим одиночный импульс $s_1(t)$, представленный на рис. 2.19, а. Пусть ему соответствует спектральная плотность $S_1(j\omega) = S_1(j2\pi f)$, где на рис. 2.19, б изображен модуль спектральной плотности сигнала $s_1(t)$.

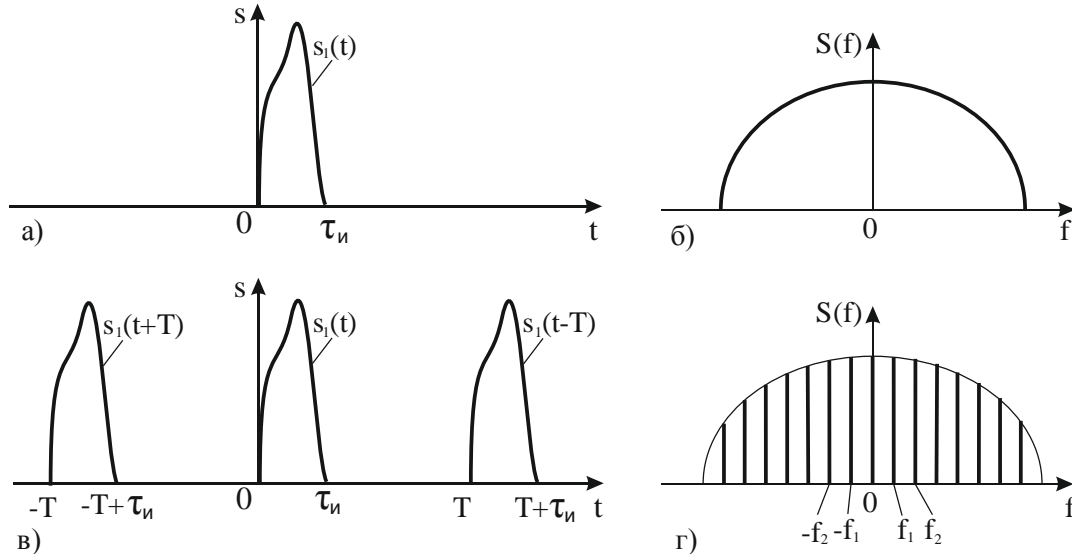


Рис. 2.19. Одиночный импульс $s_1(t)$ (а), модуль спектральной плотности этого сигнала (б), периодическая последовательность импульсов $s_1(t)$ (в) и ее дискретный спектр (г)

Будем повторять импульс $s_1(t)$ с периодом T . В результате этого получим последовательность импульсов (рис. 2.19, в). Линеичатый спектр этой последовательности импульсов изображен на рис. 2.19, г. Частотный интервал между любыми двумя соседними гармониками спектра равен $f_1 = 1/T$, где T – период следования импульсов $s_1(t)$.

Для данного спектра коэффициент k -й гармоники, в соответствии с выражением (2.20), имеет вид

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} s_1(t) \exp(-jk\omega_1 t) dt,$$

где $\omega_1 = 2\pi/T$; t_1 и t_2 соответствуют времени существования одиночного импульса (рис. 2.12).

Спектральная плотность одиночного импульса на этой же частоте $\omega = k\omega_1$ будет определяться выражением

$$S(j\omega = jk\omega_1) = \int_{t_1}^{t_2} s_1(t) \exp(-jk\omega_1 t) dt.$$

Известно, что спектральная плотность $S(j\omega = jk\omega_1)$ отличается от коэффициента c_k ряда Фурье, описывающего спектральный состав периодической последовательности импульсов, только отсутствием множителя $1/T$. В соответствии с этим можно записать

$$c_k = S_1(jk\omega_1)/T = f_1 S_1(jk\omega_1). \quad (2.29)$$

При этом комплексная амплитуда k -й гармоники в соответствии с выражением (2.17) равна

$$A_k = 2c_k = 2f_1 S_1(jk\omega_1). \quad (2.30)$$

Модуль коэффициента c_k определяется выражением

$$|c_k| = f_1 S_1(k\omega_1).$$

Это говорит о том, что модуль спектральной плотности одиночного импульса (рис. 2.19, б) и огибающая линейчатого спектра периодической последовательности (рис. 2.19, г), которая получена в соответствии с периодическим повторением заданного импульса, совпадают по форме, при этом они отличаются только масштабом.

Рассматривая рис. 2.19, г, можно отметить, что с увеличением периода T следования импульсов спектральные линии сближаются и коэффициенты c_k уменьшаются. При этом отношение $|c_k|/f_1$ остается постоянным. При $T \rightarrow \infty$ приходим к одиночному импульсу со спектральной плотностью

$$S_1(j\omega) = \lim_{f_1} \left(\frac{c_k}{f_1} \right).$$

В соответствии с этим выражением можно сделать вывод, что спектральная плотность сигнала $S(j\omega)$ характеризует амплитуду сигнала, приходящуюся на 1 Гц в бесконечно узкой полосе частот, включающую и рассматриваемую частоту.

2.9. Свойства преобразования Фурье

Для решения практических задач установим связь между спектральной плотностью сигналов (2.23) и временным описанием

сигналов (2.24). Для этого рассмотрим ряд положений, характеризующих преобразования сигналов и их спектров.

2.9.1. Сдвиг сигналов во времени

Допустим, имеется сигнал $s_1(t)$, который существует в пределах временного интервала $[t_1, t_2]$. Этому сигналу соответствует спектральная плотность (2.23) $S(j\omega)$

Сдвинем сигнал $s_1(t)$ по оси времени (задержим сигнал) на величину t_0 , не изменяя его спектральной плотности. В результате этого получим сигнал $s_2(t) = s_1(t - t_0)$. Спектральная плотность этого сигнала принимает вид

$$S_2(j\omega) = \int_{t_1+t_0}^{t_2+t_0} s_2(t) \exp(-j\omega t) dt = \int_{t_1+t_0}^{t_2+t_0} s_1(t - t_0) \exp(-j\omega t) dt.$$

В этом выражении заменим переменную интегрирования t на $\tau = t - t_0$:

$$S_2(j\omega) = \int_{t_1}^{t_2} s_1(\tau) \exp(-j\omega \tau) d\tau = \int_{t_1+t_0}^{t_2+t_0} s_1(\tau) \exp(-j\omega \tau) d\tau = S(j\omega) \exp(j\omega t_0).$$

В отношении спектральной плотности $S_2(j\omega)$ сигнала $s_2(t)$, полученного путем сдвига по оси времени сигнала $s_1(t)$, можно отметить следующее:

- спектр амплитуд $S(\omega)$ спектральной плотности сигнала остается неизменным;
- фазовая характеристика спектральной плотности изменяется на величину $\pm \omega t_0$;
- при добавлении к фазе каждой спектральной составляющей $S_1(j\omega)$ исходного сигнала $s_1(t)$ фазового сдвига $\pm \omega t_0$ можно говорить, что сигнал сдвигается во времени на t_0 .

Пример 2.7. Имеется последовательность N равноотстоящих друг от друга прямоугольных импульсов. Длительность импульсов равна τ_n , а амплитуда – A (рис. 2.20). Необходимо найти спектральную плотность этой последовательности (пачки).

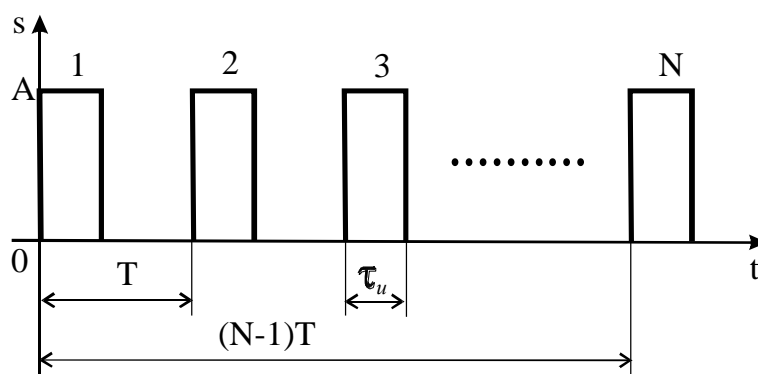


Рис. 2.20. Последовательность одинаковых равноотстоящих прямоугольных импульсов

Решение. В нашем случае спектральная плотность первого импульса последовательности описывается выражением для одиночного импульса (2.26) (примере 2.5)

$$S_1(j\omega) = A\tau_u \frac{\sin \omega\tau_u / 2}{\omega\tau_u / 2}.$$

Спектральные плотности второго и последующих импульсов в последовательности (рис. 2.20) представляют собой спектральные плотности первого импульса с фазовыми характеристиками, измененными на величину $\pm \omega nT$, где $n=1, 2, 3, \dots, N$ (см. п. 2.8.1)

$$S_2(j\omega) = S_1(j\omega) \exp(-j\omega T);$$

$$S_3(j\omega) = S_1(j\omega) \exp(-j2\omega T);$$

.....

$$S_n(j\omega) = S_1(j\omega) \exp[-j(N-1)\omega T].$$

В соответствии с этим суммарная спектральная плотность последовательности из N импульсов будет иметь вид

$$S(j\omega) = S_1(j\omega) [1 + \exp(-j\omega T) + \exp(-j2\omega T) + \dots + \exp\{-j(N-1)\omega T\}].$$

На основании проведенных вычислений относительно слагаемых в квадратных скобках полученного выражения отметим следующие:

– на частотах $\omega = n2\pi/T$, где $n=1, 2, 3, \dots, N-1$ каждое из слагаемых в квадратных скобках равно 1. В окрестности каждой из этих частот $\omega = n2\pi/T$ располагается спектральная плотность первого импульса $S_1(n2\pi/T)$;

– в последовательности содержится N импульсов, в соответствии с этим можно отметить, что модуль спектральной плотности этой

последовательности будет иметь вид $S(\omega) = NS_1(n2\pi/T)$. Спектральные составляющие с частотами $\omega = n2\pi/T$ складываются с фазовыми сдвигами кратными 2π . В связи с этим модуль спектральной плотности последовательности импульсов в N раз больше модуля спектральной плотности одиночного импульса;

– на частотах $\omega = 2\pi/(NT)$ и на частотах, где сумма слагаемых $\exp(-jk\omega T)$ в квадратных скобках выражения обращается в нуль, суммарная спектральная плотность последовательности импульсов равна нулю;

– на частотах $\omega = 2\pi N/T$, отличных от частот $\omega = n2\pi/T$, модуль спектральной плотности определяется геометрической суммой спектральных плотностей отдельных импульсов при одинаковой частоте.

Для примера на рис. 2.21 представлен модуль спектральной плотности последовательности, состоящей из трех равноотстоящих прямоугольных импульсов. Длительность импульсов равна τ_n , а период следования импульсов – $T = 3\tau_n$. На рис. 2.21 пунктирной линией показан модуль спектральной плотности одиночного импульса.

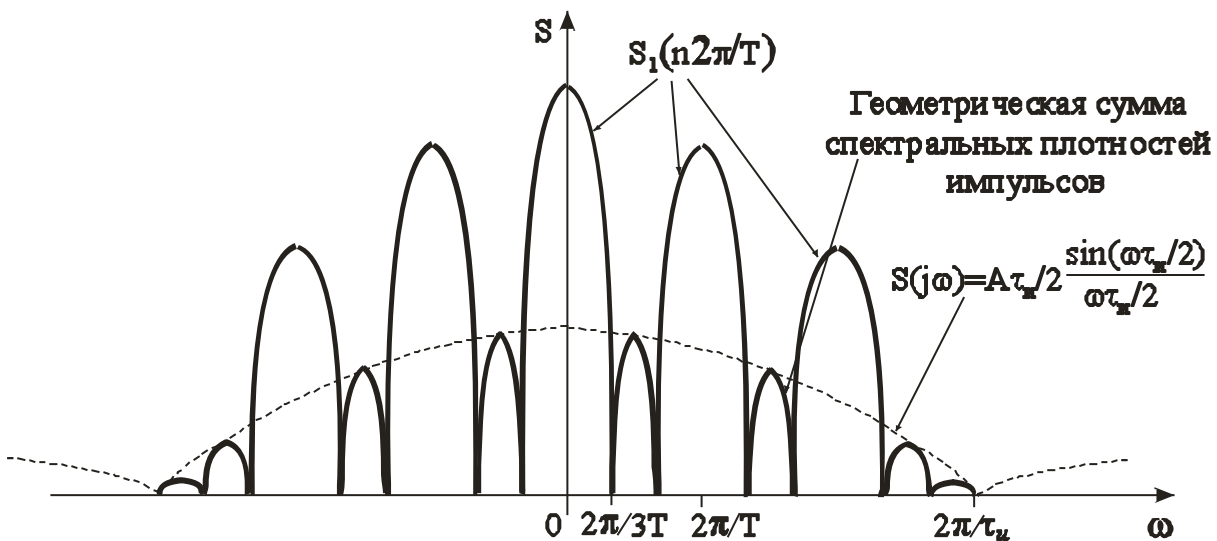


Рис. 2.21. Модуль спектральной плотности последовательности, включающей три равноотстоящих прямоугольных импульса

2.9.2. Изменение масштаба времени функций времени

Рассмотрим произвольный импульсный сигнал $s_1(t)$. Длительность сигнала равна τ_n (сплошная линия на рис. 2.22). Изменив масштаб времени

этого сигнала на n , получим новый сигнал $s_2(t) = s_1(nt)$. Этому сигналу при $n > 1$ на рис. 2.22 соответствует пунктирная, а при $n < 1$ – штрих–пунктирная линии.

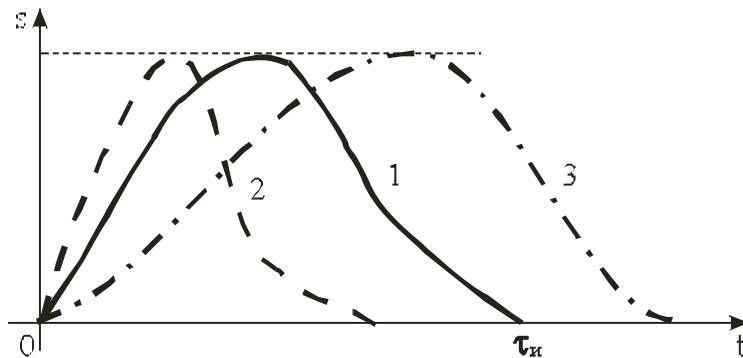


Рис.2.22. Исходный импульсный сигнал (1), его сжатая (2) и растянутая (3) во времени копии

Исходному сигналу $s_1(t)$ соответствует спектральная плотность $S_1(j\omega)$. Спектральная плотность сигнала, полученного при сжатии (растяжении) сигнала по оси времени, приобретает вид

$$S_2(j\omega) = \int_0^{\tau_n/n} s_2(t) \exp(-j\omega t) dt = \int_0^{\tau_n/n} s_1(nt) \exp(-j\omega t) dt.$$

Изменяя переменную интегрирования t на $\tau = nt$, получим:

$$S_2(j\omega) = \frac{1}{n} \int_0^{\tau_n} s_1(\tau) \exp\left(-j \frac{\omega}{n} \tau\right) d\tau = \frac{1}{n} S_1\left(j \frac{\omega}{n}\right).$$

В соответствии с проведенными вычислениями, для сигнала, полученного при сжатии на оси времени в n раз, можно отметить следующее:

- спектр сигнала на оси частот расширяется в n раз;
- амплитуды спектральных составляющих модуля спектральной плотности сигнала уменьшаются в n раз.

При растяжении сигнала на оси времени в n раз его ширина спектра уменьшается, а амплитуды спектральных составляющих модуля спектральной плотности увеличиваются в n раз.

2.9.3. Смещение спектра сигнала по оси частот

Умножим произвольный сигнал $s(t)$ на сигнал, изменяющийся по гармоническому закону $\cos(\omega_0 t + \Theta_0)$ или $\sin(\omega_0 t + \Theta_0)$, где ω_0 и Θ_0 представляют собой постоянные величины.

В соответствии с выражением (2.23) вычислим спектральные плотности от произведения этих сигналов

$$S_{\cos}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cos(\omega_0 t + \Theta_0) \exp(-j\omega t) dt;$$

$$S_{\sin}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \sin(\omega_0 t + \Theta_0) \exp(-j\omega t) dt.$$

В этих выражениях заменим сигнал $\cos(\omega_0 t + \Theta_0)$ на $\{\exp[j(\omega_0 t + \Theta_0)] + \exp[-j(\omega_0 t + \Theta_0)]\} / 2$, а сигнал $\sin(\omega_0 t + \Theta_0)$ на $\{\exp[j(\omega_0 t + \Theta_0)] - \exp[-j(\omega_0 t + \Theta_0)]\} / 2j$. В результате этого будем иметь

$$S_{\cos}(j\omega) = \frac{1}{2} \exp(j\Theta_0) \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \exp[-j(\omega - \omega_0)t] dt + \frac{1}{2} \exp(-j\Theta_0) \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \exp[-j(\omega + \omega_0)t] dt;$$

$$S_{\sin}(j\omega) = \frac{1}{2j} \exp(j\Theta_0) \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \exp[-j(\omega - \omega_0)t] dt - \frac{1}{2} \exp(-j\Theta_0) \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \exp[-j(\omega + \omega_0)t] dt.$$

В этих выражениях первые интегралы представляют собой спектральные плотности исходного сигнала в области частот $(\omega - \omega_0)$, а вторые интегралы — $(\omega + \omega_0)$. В соответствии с этим можно записать

$$S_{\cos}(j\omega) = \frac{1}{2} \exp(j\Theta_0) S[j(\omega - \omega_0)] + \frac{1}{2} \exp(-j\Theta_0) S[j(\omega + \omega_0)];$$

$$S_{\sin}(j\omega) = \frac{1}{2j} \exp(j\Theta_0) S[j(\omega - \omega_0)] - \frac{1}{2} \exp(-j\Theta_0) S[j(\omega + \omega_0)].$$

Полученные выражения говорят о следующем. Умножение исходного произвольного сигнала $s(t)$ на сигнал, изменяющийся по гармоническому закону $\cos(\omega_0 t)$ или $\sin(\omega_0 t)$, приводит к расщеплению спектра сигнала на две части. Эти части спектра смещены по оси частот на $-\omega_0$ и $+\omega_0$.

2.9.4. Связь суммы сигналов и их спектральных плотностей

Преобразование Фурье (2.23), определяющее спектральную плотность функции времени, является линейным. Это говорит о том, что сумме $s(t) = s_1(t) + s_2(t) + \dots$ сигналов $s_1(t)$, $s_2(t)$, ..., обладающих спектрами $S_1(j\omega)$, $S_2(j\omega)$, ..., будет соответствовать следующая спектральная плотность $S(j\omega) = S_1(j\omega) + S_2(j\omega) + \dots$.

2.9.5. Интегрирование и дифференцирование сигналов

..... Рассмотрим дифференцирование и интегрирование некоторого сигнала $s_1(t)$. Под дифференцированием сигнала можно понимать как дифференцирование всех составляющих спектра сигнала, изменяющихся по гармоническому закону.

..... Поскольку производная функции $\exp(j\omega t)$ равна $j\omega \cdot \exp(j\omega t)$, то можно записать следующие соответствия:

$$s_1(t) \div S_1(j\omega); \quad s_2(t) = \frac{ds_1(t)}{dt} \div j\omega S_1(j\omega) = S_2(j\omega). \quad (2.31)$$

К подобному результату можно прийти, рассматривая и преобразования Фурье

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds_1(t)}{dt} \exp(-j\omega t) dt = s_1(t) \exp(-j\omega t) \Big|_{-\infty}^{\infty} + j\omega S_1(j\omega) = j\omega S_1(j\omega).$$

В этом выражении первое слагаемое в правой части обращается в нуль, поскольку при $t \rightarrow \pm\infty$ $s_1(t)$ стремится к нулю, что вытекает из условия интегрируемости сигнала.

Подобным образом можно показать, что сигналу

$$s_2(t) = \int_{-\infty}^t s_1(x) dx$$

будет соответствовать следующая спектральная плотность

$$S_2(j\omega) = \frac{1}{j\omega} S_1(j\omega). \quad (2.32)$$

2.9.6. Спектральная плотность произведения двух сигналов

Допустим, что имеется некоторый сигнал $s(t)$, который является произведением двух функций времени $f(t)$ и $g(t)$. В соответствии с этим, используя (2.23), найдем спектр сигнала $s(t)$

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \exp(-j\omega t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t) \exp(-j\omega t) dt. \quad (2.33)$$

Кроме этого, каждую функцию $f(t)$ и $g(t)$, как составляющих сигнала $s(t)$, можно представить в виде интеграла обратного преобразования Фурье:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) \exp(j\omega t) d\omega;$$

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(j\omega) \exp(j\omega t) d\omega.$$

Тогда, подставляя в (2.33) второй из этих интегралов, будем иметь

$$S(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left[\int_{-\infty}^{\infty} G(jx) \exp(jxt) dx \right] \exp(-j\omega t) dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(jx) \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp[-j(\omega - x)t] dt \right] dx.$$

В этом выражении интеграл в квадратных скобках по переменной t представляет собой спектральную плотность $F[j(\omega - x)]$ функции $f(t)$ при частоте $(\omega - x)$. В соответствии с этим получим следующее выражение

$$S(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(jx) F[j(\omega - x)] dx. \quad (2.34)$$

Выражение (2.34) говорит о том, что спектр произведения двух функций времени $f(t)$ и $g(t)$ равен свертке их спектров $F(j\omega)$ и $G(j\omega)$ (с коэффициентом $(1/2\pi)$). На частоте $\omega = 0$ из выражений (2.33) и (2.34) вытекает равенство:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(jx)F(-jx)dx.$$

Заменяя в последнем выражении x на ω , получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(j\omega)F(-j\omega)d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(j\omega)F^*(j\omega)d\omega, \quad (2.35)$$

где $F^*(j\omega)$ – функция комплексно-сопряженная к функции $F(j\omega)$.

Подобным же образом можно показать, что произведению двух спектров $F(j\omega) \cdot G(j\omega) = S(j\omega)$ соответствует функция времени $s(t)$, являющаяся сверткой функций $f(t)$ и $g(t)$:

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(t-y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-y)g(y)dy = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)G(j\omega)\exp(j\omega t)d\omega. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Если предположить, что функция времени $f(t)$ является входным сигналом линейной цепи, а $g(t)$ – импульсной характеристикой этой цепи, кроме этого, $F(j\omega)$ является спектральной плотностью сигнала, а $G(j\omega)$ – передаточной функции (комплексной частотной характеристикой) цепи, то тогда выражение (2.36) можно использовать при анализе прохождения сигналов через линейные цепи.

2.9.7. Особенности спектров сигналов

Рассмотрим выражение, описывающее спектральную плотность сигнала (2.23) и выясним свойства функции $S(j\omega)$ для различных функций времени $s(t)$.

1. Спектральную плотность сигнала (2.23) можно свести к виду

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cos(\omega t) dt - j \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \sin(\omega t) dt.$$

Применительно к этому выражению, если $s(t)$ является четной функцией относительно t , то в выражении, описывающем спектральную

плотность сигнала, второй интеграл равен нулю, поскольку произведение $s(t)\sin(\omega t)$ является нечетной функцией относительно t , а пределы интегрирования симметричны.

Соответственно, если функция времени $s(t)$ является четной относительно t , то тогда функция $S(j\omega)$, определяемая первым интегралом, будет вещественной функцией и четной относительно ω .

2. Если сигнал $s(t)$ является нечетной функцией относительно t , то в выражении для спектральной плотности в нуль обращается первый интеграл, а спектральная плотность принимает вид

$$S(j\omega) = -j \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \sin(\omega t) dt.$$

В этом случае $S(j\omega)$ – нечетная и чисто мнимая функция.

3. Если функция времени $s(t)$ не является четной или нечетной относительно t , то ее можно разложить на две функции: четную $s_1(t)$ и нечетную $s_2(t)$. В этом случае спектральная плотность $S(j\omega)$ представляет собой комплексную функцию, у которой действительная часть четна, а мнимая нечетна относительно ω .

2.9.8. Возможность взаимной замены частоты и времени в преобразованиях Фурье

Из п. 1 раздела 2.8.7 вытекает следующее. Для четной функции времени $s(t)$ можно произвольно выбирать знак перед t в обратном преобразовании Фурье (2.24). Выберем знак минус и запишем формулу обратного преобразования Фурье в виде

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) \exp(-j\omega t) d\omega.$$

В этом выражении заменим переменную интегрирования ω на t , а параметр t на ω . Это позволяет получить следующее выражение

$$s(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(t) \exp(-j\omega t) dt.$$

Интеграл в этом выражении можно рассматривать как спектральную плотность новой функции $S(t)$, которая получена заменой ω на t в выражении спектральной плотности сигнала $s(t)$.

Обозначим эту спектральную плотность через $S'(j\omega)$. В этом случае можно записать очевидное выражение

$$S'(j\omega) = 2\pi s(j\omega).$$

Полученное выражение говорит о том, что переменные ω и t в преобразованиях Фурье взаимно заменимы. Если четному сигналу $s(t)$ соответствует спектральная плотность $S(j\omega)$, то сигналу $S(t)$ соответствует спектральная плотность $2\pi s(j\omega)$.

2.10. Спектральная плотность мощности детерминированного сигнала

Под энергией произвольного сигнала $s(t)$ понимают величину

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt.$$

Перепишем это выражение, выразив сигнал $s(t)$ в соответствии с интегралом обратного преобразования Фурье (2.24):

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)s(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) \exp(j\omega t) d\omega \right] dt.$$

Проведя соответствующие преобразования этого выражения, будем иметь

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) \left[\int_{-\infty}^{\infty} s(t) \exp(j\omega t) dt \right] d\omega.$$

Интеграл в квадратных скобках этого выражения представляет собой комплексно-сопряженную спектральную плотность $S^*(j\omega)$ сигнала $s(t)$. Учитывая это, полученное выражение сведем к виду

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) S^*(j\omega) d\omega. \quad (2.37)$$

Произведение комплексного числа на комплексно-сопряженное число $S(j\omega)S^*(j\omega)$ равно квадрату модуля $|S(j\omega)|^2$ от комплексного числа. Это позволяет свести выражение (2.37) следующему виду:

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S(j\omega)|^2 d\omega \quad (2.38)$$

Учитывая, что $\omega = 2\pi f$, в соответствии с (2.38) запишем следующее равенство:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} |S(j\omega)|^2 df.$$

Это выражение называют равенством Парсевала. Оно определяет энергию сигнала через временную функцию $s(t)$ или спектральную плотность энергии, которая равна $|S(j\omega)|^2$ и характеризует величину энергии сигнала, приходящуюся на 1 Гц.

Для сигнала, существующего на ограниченном интервале времени $[-T/2, T/2]$, равенство Парсевала записывается в виде

$$\int_{-T/2}^{T/2} s^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} |S(j\omega)|^2 df.$$

Разделим левую и правую части этого равенства на время, равное T . Устремим время T к бесконечности. В этом случае получим следующее равенство:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|S(j\omega)|^2}{T} df = \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) df.$$

В этом выражении величину $G(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|S(j\omega)|^2}{T}$ называют спектральной плотностью мощности сигнала.

С увеличением времени T энергия и величина $|S(j\omega)|^2$ незатухающих сигналов как правило возрастают до достаточно больших величин. В то же время спектральная мощность сигнала $G(\omega)$ стремится к определенному пределу, что бывает удобным при анализе радиотехнических сигналов и устройств.

2.11. Спектры типовых неинтегрируемых сигналов

Основным условием применения преобразования Фурье к функции времени $s(t)$ является ее абсолютная интегрируемость:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)| dt < \infty. \quad (2.39)$$

Это условие накладывает существенное ограничение на то множество сигналов, для которых возможно применение преобразования Фурье (2.23). Например, в теории радиотехнических сигналов и цепей весьма широко используют гармонические колебания, которые задаются на интервале времени $-\infty < t < +\infty$. Подобные сигналы условию (2.39) не удовлетворяют. Имеются и другие функции, которые не удовлетворяют условию (2.39), например, единичный скачок (функция Хевисайта).

В разд. (1.6) рассмотрены свойства дельта-функции. Эти свойства позволяют найти спектральную плотность неинтегрируемых сигналов.

Рассмотрим один из неинтегрируемых сигналов, сигнал, изменяющийся по гармоническому закону $s(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \theta_0)$. Подобный сигнал не является абсолютно интегрируемым. Однако, запишем для него выражение, определяющее спектральную плотность в соответствии с (2.23):

$$\begin{aligned} S(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \exp(-j\omega t) dt = A_0 \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega_0 t + \theta_0) \exp(-j\omega t) dt = \\ &= \frac{A_0 \exp(j\theta_0)}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-j(\omega - \omega_0)t] dt + \frac{A_0 \exp(-j\theta_0)}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-j(\omega + \omega_0)t] dt. \end{aligned}$$

Из математики известны выражения

$$\begin{aligned} 2\pi \cdot \delta(\omega - \omega_0) &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-j(\omega - \omega_0)t] dt; \\ 2\pi \cdot \delta(\omega + \omega_0) &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-j(\omega + \omega_0)t] dt. \end{aligned}$$

В соответствии с этим перепишем спектральную плотность гармонического сигнала в виде

$$S(j\omega) = \frac{A_0}{2} [2\pi \exp(j\theta_0) \delta(\omega - \omega_0) + 2\pi \exp(-j\theta_0) \delta(\omega + \omega_0)] = \quad (2.40)$$

$$= A_0 \pi [\exp(j\theta_0) \delta(\omega - \omega_0) + \exp(-j\theta_0) \delta(\omega + \omega_0)].$$

Полученная спектральная плотность равна нулю на всех частотах, кроме частот $\omega = \omega_0$ и $\omega = -\omega_0$. На этих частотах $S(j\omega)$ обращается в бесконечность. Таким образом, сигналу с конечной амплитудой и изменяющемуся по гармоническому закону соответствует бесконечно большая спектральная плотность при дискретных частотах ω_0 и $-\omega_0$.

Если приравнять ω_0 нулю, то можно получить спектральную плотность сигнала на нулевой частоте, т.е. для постоянного напряжения (тока) A_0 :

$$S(j\omega) = A_0 2\pi \delta(\omega). \quad (2.41)$$

Выражение (2.40) можно соотнести к гармоникам любого периодического сигнала. В этом случае спектральная плотность произвольного периодического сигнала представится в виде:

$$S(j\omega) = A_0 2\pi \delta(\omega) + A_1 \pi [\exp(j\theta_1) \delta(\omega - \omega_1) + \exp(-j\theta_1) \delta(\omega + \omega_1)] +$$

$$+ A_2 \pi [\exp(j\theta_2) \delta(\omega - 2\omega_1) + \exp(-j\theta_2) \delta(\omega + 2\omega_1)] + \dots + \quad (2.42)$$

$$+ A_n \pi [\exp(j\theta_n) \delta(\omega - n\omega_1) + \exp(-j\theta_n) \delta(\omega + n\omega_1)] + \dots$$

Это выражение вводит понятие спектральной плотности для периодического сигнала в виде суммы дельта-функций, что бывает удобным при анализе радиотехнических сигналов.

В соответствии с выражением (2.42) и с учетом свойств дельта-функции можно отметить следующее:

– амплитуда модуля спектральной плотности $S(\omega)$ сигнала, изменяющего по гармоническому закону на частоте ω_0 , равна $A\pi$ (рис.2.23). Спектральные составляющие этого сигнала расположены на частотах $\omega = \omega_0$ и $\omega = -\omega_0$. При $\omega \neq \omega_0$ и $\omega \neq -\omega_0$ амплитуды модуля спектральной плотности сигнала равны нулю;

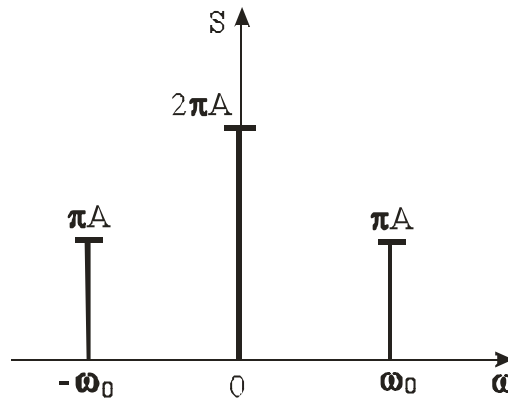


Рис.2.23. Модуль спектральной плотности сигнала, описываемого гармонической функцией

– при постоянном напряжении или токе ($\omega_0 = 0$) модуль спектральной плотности сигнала (рис.2.23) равен $S(\omega) = 2\pi A\delta(\omega)$;

Пример 2.8. Пусть имеется произвольный периодический сигнал, который можно описать рядом Фурье в тригонометрической форме

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega_1 t + \Theta_k). \quad \text{Необходимо вычислить спектральную}$$

плотность этого сигнала.

Решение. Возьмем выражением, описывающее спектральную плотность сигнала (2.23). Подставим в это выражение сигнал $s(t)$, описанный рядом Фурье:

$$\begin{aligned} S(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \exp(-j\omega t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega_1 t + \Theta_k) \right] \exp(-jk\omega t) dt = \\ &= \frac{a_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-j\omega t) dt + \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega_1 t + \Theta_k) \right] \exp(-j\omega t) dt. \end{aligned}$$

Учитывая, что $2\cos x = \exp(jx) + \exp(-jx)$, полученное выражение преобразуется к виду

$$\begin{aligned} S(j\omega) &= \frac{a_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-j\omega t) dt + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \exp\{-j[(\omega - k\omega_1)t - \Theta_k]\} dt + \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \exp\{-j[(\omega + k\omega_1)t + \Theta_k]\} dt. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Применительно к выражению (2.43) учтем свойства дельта-функции:

– интеграл от произведения некоторой функции времени $s(t)$ на δ -функцию равен значению функции $s(t)$ в момент, когда $\delta(t) \neq 0$, т.е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(t - \tau) \delta(t) dt = s(-\tau);$$

– спектральная плотность δ -функции равна единице

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \exp(-j\omega t) dt = 1;$$

– обратное преобразование Фурье позволяет выразить δ -функцию в виде

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(j\omega t) dt.$$

Тогда, в соответствии с выражением (2.43), выражение для спектральной плотности периодической функции сводится к виду

$$S(j\omega) = a_0 \pi \delta(0) + \pi \sum_{k=1}^{\infty} \{a_k [\exp(j\Theta_k) \delta(k\omega_1 - \omega) + \exp(-j\Theta_k) \delta(-k\omega_1 - \omega)]\}. \quad (2.44)$$

Ранее было получено выражение, аппроксимирующее последовательность прямоугольных импульсов рядом Фурье

$$s(t) = 2A \frac{\tau_{\text{и}}}{T} + \frac{2A\tau_{\text{и}}}{T} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k\omega_1 \tau_{\text{и}} / 2}{k\omega_1 \tau_{\text{и}} / 2} \cos k\omega_1 t.$$

В соответствии с этим выражением можно описать амплитуды каждой из спектральных составляющих в выражении (2.44)

$$2A \frac{\tau_{\text{и}}}{T} \pi \left(\frac{\sin k\omega_1 \tau_{\text{и}} / 2}{k\omega_1 \tau_{\text{и}} / 2} \right).$$

Модуль спектральной плотности последовательности прямоугольных импульсов приведен на рис. 2.24.

В соответствии с выражением (2.44) и рис. 2.24 можно отметить, что спектральные составляющие последовательности прямоугольных импульсов представляют собой δ -функции. Каждой из этих функций соответствует своя частота, кратная частоте ω_1 следования импульсов в периодической последовательности. Амплитуды спектральных

составляющих с ростом частоты убывают пропорционально функции $(\sin k\omega_1\tau_n/2)/(k\omega_1\tau_n/2)$.

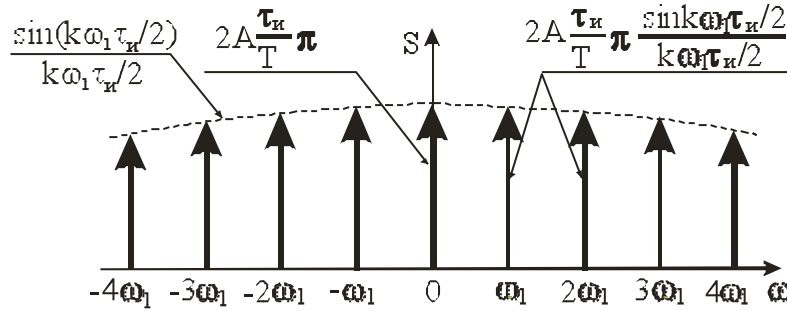


Рис.2.24. Модуль спектральной плотности периодической последовательности прямоугольных импульсов

Для примера рассмотрим еще одну явно неинтегрируемую функцию. Найдем спектральную плотность единичного скачка (функция Хевисайта) (рис. 1.8). Эту функцию можно представить в виде следующей суммы:

$$s(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{sign}(t), \quad (2.45)$$

где $\text{sign} = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$ – сигнум-функция, равная единице, когда знак функции изменяется при переходе переменной t через нуль.

В выражении (2.45) постоянной составляющей $1/2$ соответствует спектральная плотность $(2.41) \pi\delta(\omega)$. Спектральная плотность нечетной функции $(1/2)\text{sign}(t)$ равна дифференциалу от этой функции. При этом производная от функции $(1/2)\text{sign}(t)$ равна нулю на всей оси времени, кроме момента времени $t = 0$, где производная равна δ -функции. Спектральная плотность δ -функции равна единице. В соответствии с этим можно отметить, что спектральная плотность от функции $(1/2)\text{sign}(t)$ будет иметь вид $1/(j\omega)$.

В соответствии с этим получим спектральную плотность единичного скачка (функции Хевисайта)

$$S(j\omega) = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}. \quad (2.46)$$

3. КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ АНАЛИЗ СИГНАЛОВ

3.1. Автокорреляционная функция детерминированных сигналов

Анализ радиотехнических цепей (устройств) можно проводить как в частотной, так и во временной областях. При анализе радиотехнических цепей в частотной области оперируют спектральной плотностью сигнала, а при анализе цепей во временной области, оперируют, например, интегралом Дюамеля. Однако при анализе цепей во временной области часто на практике оказывается необходимой характеристика, дающая представление о некоторых свойствах сигнала, таких как скорость изменения сигнала во времени, длительность. Для получения ответов на эти вопросы широко используют *корреляционную функцию* сигнала.

Различают два типа корреляционных функций:

- автокорреляционная функция;
- взаимно корреляционная функция.

Под автокорреляционной функцией сигнала $s(t)$ понимают величину

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)s(t + \tau)dt. \quad (3.1)$$

Автокорреляционная функция $R(\tau)$ характеризует степень связи (корреляции) сигнала $s(t)$ со своей копией $s(t + \tau)$, сдвинутой на величину τ по оси времени.

Автокорреляционной функции характерны следующие свойства.

1. Значение автокорреляционной функции при временном сдвиге $\tau = 0$ достигает максимума и равно энергии сигнала E :

$$R(0) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)s(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)dt = E. \quad (3.2)$$

2. Автокорреляционная функция при временных сдвигах $\tau > 0$ принимает значения, меньшие энергии сигнала:

$$R(\tau) < R(0) = E.$$

3. Автокорреляционная функция является четной функцией:

$$R(\tau) = R(-\tau).$$

Справедливость первого свойства вытекает из выражения, описывающего автокорреляционную функцию (3.1). Из этого выражения видно, что, когда временной сдвиг равен нулю $\tau=0$, автокорреляционная функция определяется интегралом от квадрата исходного сигнала, а это есть энергия сигнала.

В справедливости же 2-го и 3-го свойств можно убедиться, рассмотрев пример, в котором вычисляется автокорреляционная функция прямоугольного импульса и его копии, сдвинутой во времени на величину τ (рис. 3.1, а).

Согласно выражения (3.1), автокорреляционная функция определяется интегралом от произведения функции $s(t)$ на ее сдвинутую на время $t=-\tau$ копию $s(t+\tau)$ (рис. 3.1, б). Площадь, определяемая графиком произведения функций $s(t)$ и $s(t+\tau)$, приведена на рис. 3.1, в и определяется выражением $A^2(\tau_{\text{и}} - \tau)$. Тогда автокорреляционную функцию для прямоугольного импульса можно записать в виде

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)s(t+\tau)dt = A^2(\tau_{\text{и}} - \tau) = A^2\tau_{\text{и}} \left(1 - \frac{\tau}{\tau_{\text{и}}}\right).$$

Рассматривая это выражение, применительно ко второму свойству можно отметить следующее. Автокорреляционная функция прямоугольного импульса $R(\tau)$ определяется уравнением прямой (рис. 3.1, г). Она изменяется от максимума, равного энергии сигнала E при $\tau=0$, до нуля при $\tau=\tau_{\text{и}}$. При значениях $\tau_{\text{и}} \geq \tau \geq 0$ выполняется неравенство $R(\tau) < R(0)$.

Для убеждения в справедливости 3-го свойства вычислим автокорреляционную функцию $R(\tau)$ прямоугольного импульса для отрицательных значений τ , т.е. сдвинем копию сигнала $s(t)$ вправо. В результате этого получим

$$R(-\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)s(t-\tau)dt = A^2\tau_{\text{и}} \left(1 - \frac{\tau}{\tau_{\text{и}}}\right).$$

Из этого выражения можно видеть, что и при отрицательных значениях τ , автокорреляционная функция прямоугольного импульса описывается уравнением прямой.

Окончательно выражение для автокорреляционной функции прямоугольного импульса принимает вид (рис. 3.1,г)

$$R(\tau) = A^2 \tau_{\text{и}} \left(1 - \frac{|\tau|}{\tau_{\text{и}}} \right).$$

Проведя вычисление автокорреляционной функции прямоугольного импульса можно отметить следующее:

- длительность автокорреляционной функции равна удвоенной длительности импульса;
- при временном сдвиге равном нулю $\tau=0$ автокорреляционная функция равна энергии сигнала;
- при увеличении временного сдвига τ автокорреляционная функция убывает; убывание может быть не обязательно монотонным;
- при сдвиге сигналов $s(t)$ и $s(t+\tau)$ друг относительно друга на время, большее длительности импульса, автокорреляционная функция обращается в нуль.

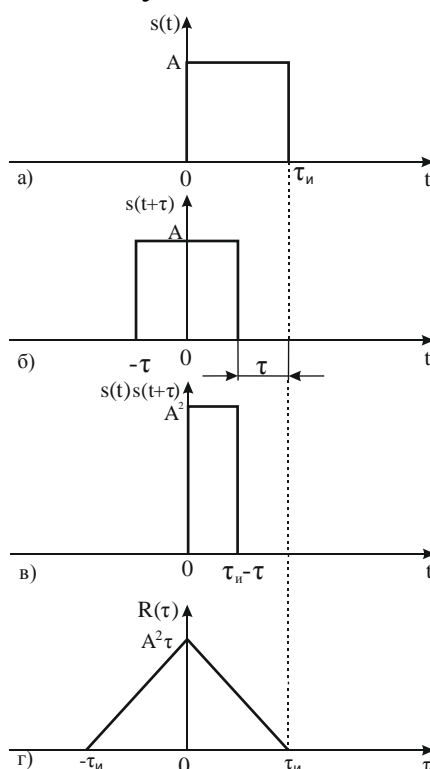


Рис. 3.1. К вычислению автокорреляционной функции прямоугольного импульса: а – прямоугольный импульс; б – прямоугольный импульс, задержанный во времени на величину τ ; в – произведение импульсов; г – автокорреляционная функция

На рис. 3.2. для примера приведено построение автокорреляционной функции для треугольного импульса. Можно видеть, что прямоугольный (рис. 3.1) и треугольный (рис. 3.2) импульсы отличаются по форме, однако автокорреляционные функции, им соответствующие, имеют общие свойства, а именно:

- длительности обеих автокорреляционных функций равны удвоенной длительности импульсов;
- при временном сдвиге, равном нулю $\tau = 0$, автокорреляционные функции прямоугольного и треугольного импульсов равны энергии сигналов;
- при увеличении временного сдвига τ автокорреляционные функции убывают, при этом функция прямоугольного импульса убывает по линейному закону, а треугольного – по закону, близкому к гиперболе;
- при сдвиге прямоугольных или треугольных импульсов друг относительно друга на время, большее длительности импульсов, автокорреляционные функции, им соответствующие, обращаются в нуль.

Из общего определения автокорреляционной функции, а также из приведенных примеров и свойств функции видно, что автокорреляционная функция является четной функцией. Это говорит о том, что не имеет значения в какую сторону (вправо или влево) по оси времени относительно своей копии сдвигать сигнал на величину τ . В связи с этим выражение, описывающее автокорреляционную функцию, можно представить в более общем виде:

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)s(t + \tau)dt = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)s(t - \tau)dt.$$

В общем виде сигнал, для которого определяется автокорреляционная функция, может иметь различную форму. Это в конечной мере накладывает отпечаток на вид автокорреляционной функции, что можно наблюдать применительно к сигналам, рассмотренным выше. Для уяснения других свойств автокорреляционных функций рассмотрим сигнал, представляющий собой пачку из трех

одинаковых прямоугольных импульсов. Импульсы следуют друг за другом с временным интервалом T (рис. 3.3,а). На рис. 3.3, б представлена автокорреляционная функция, соответствующая этому сигналу.

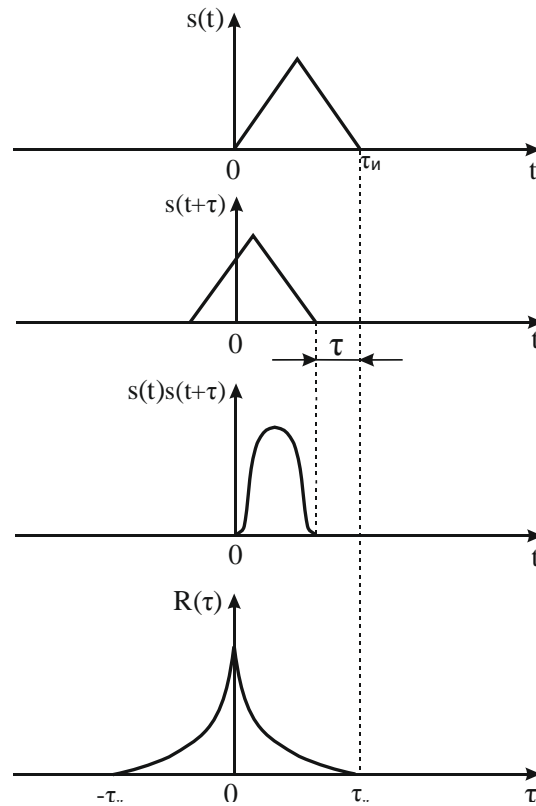


Рис. 3.2. К вычислению автокорреляционной функции треугольного импульса

Применительно к этому случаю значение временного сдвига τ пусть равно $0, \pm T$ и $\pm 2T$. Рассматривая автокорреляционную функцию для пачки из трех прямоугольных импульсов можно отметить следующее:

- по виду эта автокорреляционная функция относительно одного импульса совпадает с функцией, представленной на рис. 3.1, г для одиночного импульса;
- максимальное значение автокорреляционной функции при временном сдвиге $\tau = 0$ равно утроенной энергии одиночного импульса;
- при увеличении временного сдвига энергия импульсов автокорреляционной функции снижается: при $\tau = \pm T$ автокорреляционная функция равна удвоенной энергии одиночного импульса, при $\tau = \pm 2T$ – энергии одиночного

импульса;

- число временных сдвигов, когда автокорреляционная функция для пачки импульсов относительно положительных и отрицательных временных сдвигах не равна нулю определяется выражением $[(n-1)+1]$, где n – число импульсов в пачке;
- при увеличении числа импульсов в пачке энергия автокорреляционной функции при $\tau = 0$ определяется выражением nE , где n – число импульсов в пачке, а E – энергия одиночного импульса.

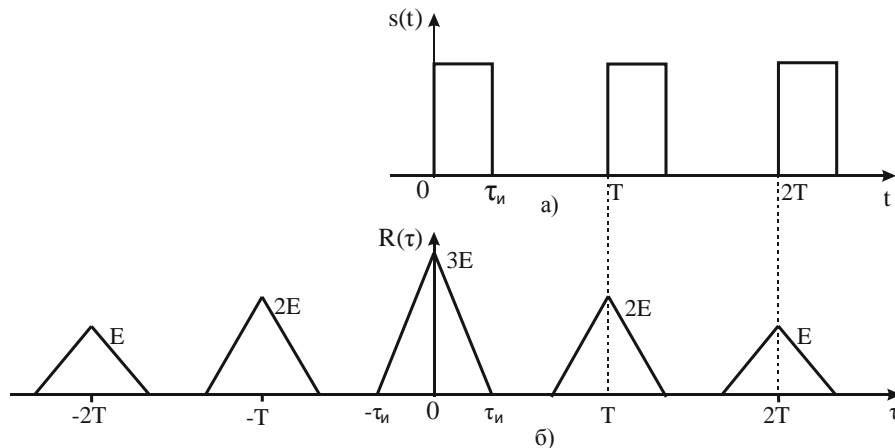


Рис. 3.3. Пачка из трех прямоугольных импульсов (а) и корреляционная функция, соответствующая пачке импульсов (б)

3.2. Автокорреляционная функция периодических сигналов

Рассмотрим автокорреляционную функцию относительно периодического сигнала. Энергия периодического сигнала, изменяющегося от $-\infty$ до $+\infty$, стремится к бесконечно большой величине. Это говорит о том, что выражение (3.1) нельзя использовать для вычисления автокорреляционной функции. Необходима функция, которая при временном интервале существования сигнала, стремящемся к бесконечности, сама стремилась бы к конечной величине. В качестве подобной функции можно использовать функцию, имеющую размерность средней мощности. В этом случае автокорреляционная функция для периодического сигнала будет иметь вид

$$R_{\text{пер}}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t)s(t+\tau)dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t)s(t-\tau)dt. \quad (3.3)$$

Из выражения (3.3) можно заключить, что при $\tau=0$, автокорреляционная функция $R_{\text{пер}}(0)$ будет равна средней мощности периодического сигнала.

Исходный сигнал $s(t)$ является периодической функцией. В связи с этим можно заключить, что получение средних значений от произведений $s(t)s(t+\tau)$ или $s(t-\tau)s(t)$ по бесконечно большому временному интервалу $T \rightarrow \infty$ должно совпадать со средним значением этих произведений за период T_1 изменения исходного сигнала. Это позволяет представить выражение (3.3) в следующем виде:

$$R_{\text{пер}}(\tau) = \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} s(t)s(t+\tau)dt = \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} s(t)s(t-\tau)dt. \quad (3.4)$$

В этом выражении интегралы представляют собой автокорреляционные функции

$$R_{T_1}(\tau) = \int_{-T_1/2}^{T_1/2} s(t)s(t+\tau)dt = \int_{-T_1/2}^{T_1/2} s(t)s(t-\tau)dt. \quad (3.4')$$

исходного сигнала и его копии за период T_1 их изменения.

Таким образом, для периодических сигналов можно рассматривать автокорреляционную функцию, имеющую размерность как средней мощности (3.3), так и – энергии (3.4'), когда рассматривается один период изменения периодического сигнала. Тогда в соответствии с выражениями (3.4) и (3.4') можно записать очевидное равенство

$$R_{\text{пер}}(\tau) = R_{T_1}(\tau)/T_1.$$

В соответствии с проведенным анализом можно заключить, что периодическому сигналу $s(t)$ соответствует и периодическая автокорреляционная функция $R_{\text{пер}}(\tau)$. Эта функция будет повторяться с периодом T_1 .

Пример 2.8. Вычислите автокорреляционную функцию гармонического колебания $s(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \theta_0)$.

Решение. В соответствии с выражением (3.4) автокорреляционная функция гармонического колебания представится в виде

$$R_{\text{пер}}(\tau) = \frac{A_0^2}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} \cos(\omega_0 t + \theta_0) \cos[\omega_0(t + \tau) + \theta_0] dt = \frac{1}{2} A_0^2 \cos(\omega_0 \tau),$$

где $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_1}$ – круговая частота гармонической функции.

Используя тригонометрические преобразования, выражение для автокорреляционной функции перепишем в виде

$$R_{\text{пер}}(\tau) = \frac{A_0^2}{2T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} \cos(2\omega_0 t + \omega_0 \tau + 2\theta_0) dt + \frac{A_0^2}{2T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} \cos(\omega_0 \tau) dt.$$

Вычисляя интегралы, подставляя пределы интегрирования и заменяя ω_0 на $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_1}$, получим

$$R_{\text{пер}}(\tau) = \frac{A_0^2}{4\pi} [\sin(2\pi + 4\pi\tau + \theta_0) - \sin(-2\pi + 4\pi\tau + \theta_0)] + \\ + \frac{A_0^2}{2} \cos(\omega_0 \tau).$$

Из соображений того, что функция синус повторяет свои значения через 2π , можно заключить, что первое слагаемое в этом выражении будет равно нулю. Тогда автокорреляционная функция от гармонического сигнала представится в виде

$$R_{\text{пер}}(\tau) = \frac{A_0^2}{2} \cos(\omega_0 \tau).$$

В соответствии с этим выражением можно сделать выводы:

- при временном сдвиге $\tau = 0$ автокорреляционная функция $R_{\text{пер}}(\tau) = \frac{1}{2} A_0^2$; это говорит о том, что в данном случае значение автокорреляционной функции равно средней мощности гармонического колебания с амплитудой A_0 ;
- автокорреляционная функция $R_{\text{пер}}(\tau)$ гармонической функции не зависит от начальной фазы колебания θ_0 ;
- автокорреляционная функция от гармонической функции периодическая и повторяется с периодом T_1 изменения

гармонической функции.

Для примера и наглядности на рис. 3.4,б изображена автокорреляционная функция сигнала, представляющего собой периодическую последовательность треугольных импульсов (рис. 3.4,а). Можно видеть, что каждый импульс автокорреляционной функции $R_{\text{пер}}(\tau)$ совпадает по форме с корреляционной функцией одиночного импульса (рис. 3.2, г). Следует отметить, что максимальные значения $R_{\text{пер}}(\tau)$ равны не энергии исходного сигнала $s(t)$, а средней мощности исходного сигнала $s(t)$, определяемой квадратом от исходного сигнала $s^2(t)$.

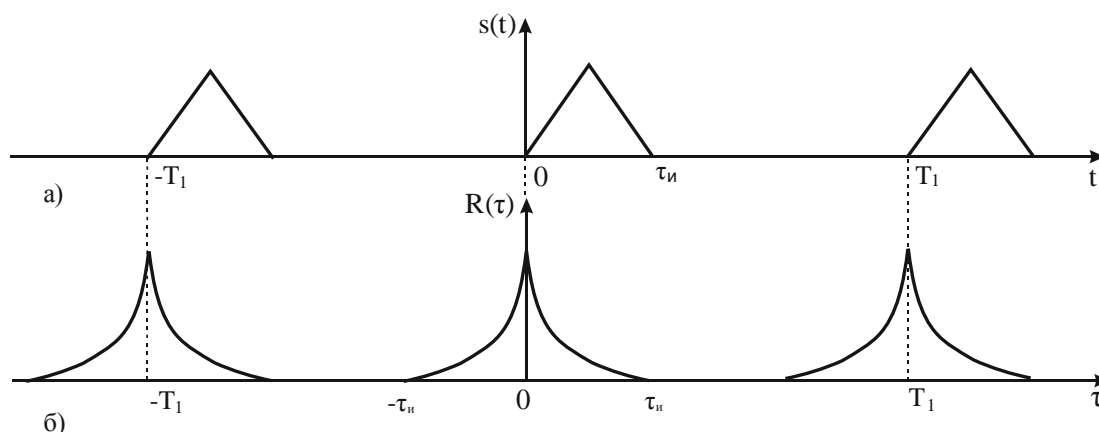


Рис. 3.4. Периодическая последовательность треугольных импульсов (а) и ее корреляционная функция (б)

3.3. Взаимная корреляционная функция сигналов

При необходимости проведения оценки степени корреляции между двумя различными сигналами $s_1(t)$ и $s_2(t)$ используют взаимную корреляционную функцию. Эта функция определяется следующим выражением:

$$B(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t)s_2(t + \tau)dt. \quad (3.5)$$

Из выражения (3.5) можно видеть, что автокорреляционная функция $R(\tau)$ является частным случаем взаимной корреляционной функции $B(\tau)$, когда $s_1(t) = s_2(t)$.

На рис. 3.5 представлено построение взаимной корреляционной функции для двух сигналов $s_1(t) = -\frac{U}{T}t + U$ и $s_2(t) = \frac{U}{T}t$, где U –

максимальное значение сигналов. На рис. 3.5,а показано положение сигналов при временном сдвиге, равном нулю ($\tau = 0$). Этому положению сигналов соответствует некоторое значение взаимной корреляционной функции (рис. 3.5, в). При сдвиге сигнала $s_2(t)$ влево по оси времени ($\tau > 0$, рис. 3.5, б) взаимная корреляционная функция сначала возрастает, а затем снижается до нуля при $\tau = T$ (рис. 3.5, в). При сдвиге сигнала $s_2(t)$ вправо ($\tau < 0$) взаимная корреляционная функция начинает сразу убывать и достигает нуля при $\tau = -T$. Это приводит к тому, что взаимная корреляционная функция не является симметричной относительно начала координат ($\tau = 0$) и достигает максимального значения при $\tau > 0$ (рис. 3.5, в).

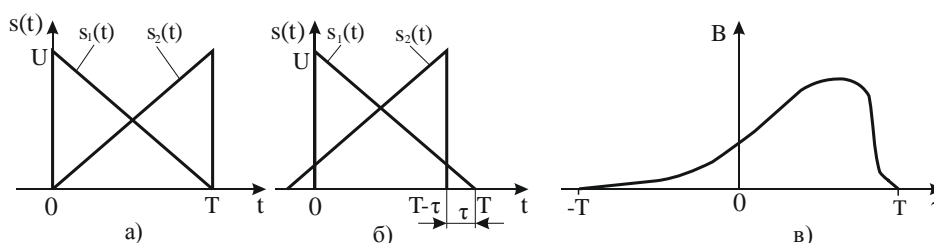


Рис. 3.5. Пример построения взаимной корреляционной функции: а – положение сигналов при $\tau = 0$; б – сдвиг сигнала $s_2(t)$ на τ ; в – график взаимной корреляционной функции

Рассматривая построение взаимной корреляционной функции для двух сигналов отличных по форме, можно сделать следующие выводы:

- значение взаимной корреляционной функции не изменится, если вместо сдвига сигнала $s_2(t)$ будем сдвигать сигнал $s_1(t)$ (обеспечим задержку сигналу $s_1(t)$); в соответствии с этим выражение (3.5) можно представить в более общем виде

$$B(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t)s_2(t + \tau)dt = \int_{-\infty}^{\infty} s_2(t)s_1(t - \tau)dt = B(-\tau);$$

- в сравнении с автокорреляционной функцией взаимная корреляционная функция не обязательно является четной относительно τ ;
- взаимная корреляционная функция может и не достигать максимального значения при $\tau = 0$; она может иметь максимальное значение при других значениях τ .

3.4 . Соотношение между корреляционной функцией и спектральной характеристикой сигнала

Покажем связь автокорреляционной функции $R(\tau)$, соответствующей сигналу $s(t)$, со спектральной плотностью $S(j\omega)$ этого же сигнала. Для этого в автокорреляционной функции (3.1) сдвинутый во времени сигнал $s(t + \tau)$ выразим через его спектральную плотность $S(j\omega)$:

$$s(t + \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) \exp(j\omega(t + \tau)) d\omega. \quad (3.6)$$

Подставим выражение (3.6) в формулу (3.1), описывающую автокорреляционную функцию. В результате получим

$$\begin{aligned} R(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) \exp(j\omega(t + \tau)) d\omega \right] dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) \left[\int_{-\infty}^{\infty} s(t) \exp(j\omega t) dt \right] \exp(j\omega \tau) d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) S^*(j\omega) \exp(j\omega \tau) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S(j\omega)|^2 \exp(j\omega \tau) d\omega. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Из полученного выражения (3.7) видно следующее:

- поскольку автокорреляционная функция имеет размерность энергии, то в соответствии со спектральной плотностью сигнала, энергия сигнала представляется как интеграл от модуля квадрата спектральной плотности сигнала деленное на 2π ;
- при $\tau = 0$ автокорреляционная функция, полученная в соответствии со спектральной плотностью сигнала, достигает максимального значения.

Произведя обратное преобразование выражения (3.7), можно получить следующее равенство:

$$|S(j\omega)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) \exp(-j\omega \tau) d\tau, \quad (3.8)$$

которое говорит о том, что в соответствии с автокорреляционной функцией можно проследить зависимость модуля от квадрата спектральной плотности сигнала.

Для сигналов с неограниченной энергией на интервале времени $T \rightarrow \infty$ автокорреляционная функция может быть сведена к виду и представлять собой среднюю мощность сигнала:

$$R_n(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{R(\tau)}{T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} u(t)u(t+\tau)dt.$$

В соответствии с этим выражением, и учитывая связь автокорреляционной функции со спектральной плотностью сигнала, запишем

$$R_n(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|S(j\omega)|^2}{T} \exp(j\omega\tau) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) \exp(j\omega\tau) d\omega, \quad (3.9)$$

где $G(\omega)$ – спектральная плотность мощности сигнала.

Спектральную плотность мощности сигнала можно найти, преобразуя автокорреляционную функцию по формуле

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) \exp(-j\omega\tau) d\tau. \quad (3.10)$$

Рассматривая связь автокорреляционной функции со спектральной плотностью сигнала, можно отметить следующее:

- автокорреляционная функция является четной функцией, в связи с этим знак перед $j\omega\tau$ в показателе степени экспоненциальной функции (3.7), (3.9) может быть произвольным;
- из выражений (3.7) и (3.8) можно проследить свойства, говорящие о том, что чем шире спектр $S(\omega)$ сигнала, тем меньше временной сдвиг τ , в пределах которого корреляционная функция не равна нулю; Соответственно, чем больше временной сдвиг τ , в пределах которого корреляционная функция не равна нулю, тем уже спектр сигнала;
- из выражений (3.7) и (3.9) можно видеть, что автокорреляционная функция $R(\tau)$ не зависит от фазочастотной характеристики спектра сигнала. Из этого можно заключить, что сигналам $s(t)$ различным по форме, но обладающими одинаковыми

спектральными плотностями сигналов, будут соответствовать одинаковые автокорреляционные функции $R(\tau)$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Денисенко А. Н. Сигналы. Теоретическая радиотехника. Справочное пособие. – М: Горячая линия-Телеком, 2005. – 704 с.: ил.
2. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы: учебник для вузов. – 3-е изд. перераб. и доп. – М.: Высшая школа, 2000. – 462 с.
3. Гоноровский И.С. Радиотехнические цепи и сигналы: учебник для вузов. – 4-е изд., перераб. и доп. – М.: Радио и связь, 1986. – 512 с.
4. Радиотехнические цепи и сигналы: учеб. пособие для вузов/ Д.В. Васильев, М.Р. Виталь, Ю.Н. Горшенко и др./Под ред. К.А. Самойло. – М.: Радио и связь, 1982. – 528 с.
5. Радиотехнические цепи и сигналы: учебник для сред. проф. образования/ К.Е. Румянцев, П.А. Землянухин, А.И. Окорочков. – М.: Академия, 2005. – 384 с.
6. Гельфанд И. М. Лекции по линейной алгебре. – 5-е изд., перераб. и доп. – М.: Добросвет, МЦНМО, 1998. – 319 с.
7. Зорич В.А. Математический анализ. Часть 1. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: ФАЗИС, 1997. – 554 с.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О СИГНАЛАХ	10
1.1. Основные понятия и определения применительно к сигналам.....	10
1.2. Классификация радиотехнических сигналов	12
1.3. Описание детерминированных сигналов гармоническими функциями	17
1.4. Описание сигналов комплексными функциями	18
1.5. Описание сигналов разрывными функциями	21
1.6. Динамическое описание сигналов	22
1.6.1. <i>Динамическое представление сигнала функцией включения</i>	27
1.6.2. <i>Динамическое представление сигнала дельта-функцией</i>	28
1.7. Функциональные пространства сигналов	29
1.8. Геометрические представления сигналов	39
1.9. Энергетические характеристики вещественных сигналов	42
1.10. Энергетические характеристики комплексных сигналов	43
1.11. Ортогональные сигналы и обобщенные ряды Фурье	45
2. СПЕКТР ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИГНАЛОВ	50
2.1. Аппроксимация произвольных сигналов. Основные понятия.....	50
2.2. Спектральное представление периодических сигналов ..	56
2.3. Анализ прохождения периодических сигналов через линейные цепи	66
2.4. Зависимость спектра периодической последовательности импульсов от длительности импульса	70
2.5. Мощность спектра периодического сигнала	77
2.6. Спектральное представление непериодических сигналов	76
2.7. Прохождение непериодических сигналов через линейные цепи.....	83
2.8. Соотношение между спектрами одиночного импульса и	85

периодической последовательности импульсов	
2.9. Свойства преобразования Фурье	86
2.9.1. <i>Сдвиг сигналов во времени</i>	87
2.9.2. <i>Изменение масштаба времени функции времени..</i>	89
2.9.3. <i>Смещение спектра сигнала по оси частот</i>	91
2.9.4. <i>Связь суммы сигналов и их спектральных</i> <i>плотностей</i>	92
2.9.5. <i>Интегрирование и дифференцирование сигналов</i>	92
2.9.6. <i>Спектральная плотность произведения двух</i> <i>сигналов</i>	93
2.9.7. <i>Особенности спектров сигналов</i>	94
2.9.8. <i>Возможность взаимной замены частоты и</i> <i>времени в преобразованиях Фурье</i>	95
2.10. Спектральная плотность мощности детерминированного сигнала	96
2.11. Спектры типовых неинтегрируемых сигналов	98
3. КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ АНАЛИЗ СИГНАЛОВ	103
3.1. Автокорреляционная функция детерминированных сигналов	103
3.2. Автокорреляционная функция периодических сигналов.	108
3.3. Взаимная корреляционная функция сигналов.....	111
3.4. Соотношение между корреляционной функцией и спектральной характеристикой сигнала	113
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	116

Учебное издание

Землянухин Петр Андреевич

ТЕОРИЯ РАДИОТЕХНИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ

Учебное пособие

Часть 1

Для студентов всех форм обучения

Отв. за выпуск

Землянухин П.А.

Редактор

Корчагина Т.Ф.

Корректор

Надточий З.И.

Подписано к печати

Формат 60х84 1/16.

Усл. п. л. – 7,5. Уч.-изд. л. – 7,3.

Заказ №

Тираж 50 экз.

Издательство Южного федерального университета

344091, г. Ростов-на-Дону, пр. Стачки, 200/1.

Отпечатано в секторе обеспечения полиграфической продукцией кампуса
в г. Таганроге отдела полиграфической, корпоративной и сувенирной
продукции ИПК КИБИ МЕДИА ЦЕНТРА ЮФУ.

ГСП 17 А, Таганрог, 28, Энгельса, 1. тел. (8634)371717, 371655.